

Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

Z A M P

Journal of Applied Mathematics and Physics
Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

Editores: J. Ackeret E. Baldinger E. Baumann R. Mercier P. Scherrer E. Stiefel
F. Stüssi W. Traupel H. Ziegler
Redactor: R. Sängler

INHALT - CONTENTS - SOMMAIRE

| | |
|--|-----|
| CHAKRAVORTI, A.: A Note on the Position of the Centre of Flexure of a Beam of Isotropic Material Having a Section Bounded by a Parabola and a Straight Line | 333 |
| ERISMANN, TH.: Der Analog-Interpolator | 339 |
| GRAVALOS, F. G.: The Dynamics of Turbo-Flow | 347 |
| LIST, R.: Der Hagelversuchskanal | 381 |

Kurze Mitteilungen - Brief Reports - Communications brèves

| | |
|--|-----|
| HOFMANN, R.: Bemerkung zur Berechnung spezieller Potenzsummen | 416 |
| PRAGER, W., and SHIELD, R. T.: Minimum Weight Design of Circular Plates Under Arbitrary Loading | 421 |
| SERMARK, K.: A Note on Addition Theorems for Mathieu Functions | 426 |
| ZIEREP, J.: Ergänzung zum Aufsatz: «Der senkrechte Verdichtungsstoss am gekrümmten Profil» | 429 |

Varia - Miscellaneous - Divers

| | |
|---|-----|
| Frühjahrstagung der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft vom 2. und 3. Mai 1959 in Brugg | 430 |
| Buchbesprechungen - Book Reviews - Notices bibliographiques. | 444 |

ZAMP

Vol. X

Fasc. 4

Pag. 333-452

25. 7. 59

Birkhäuser Verlag · Basel und Stuttgart

Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

Journal of Applied Mathematics and Physics

Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

ZAMP

Redaktor/Editor/rédacteur: Prof. Dr. R. Sängner, Postfach Zürich 23 (Schweiz)

ZAMP erscheint regelmässig alle zwei Monate. *Redaktionsschluss*: spätestens 12 Wochen vor Erscheinungstermin. Manuskripte und alle die Redaktion betreffenden Zuschriften sind an den Redaktor zu richten. Manuskripte für *Kurze Mitteilungen* können, falls die Autoren auf Zustellung eines Korrekturabzuges verzichten, 8 Wochen vor Erscheinungstermin eingereicht werden. Die Beiträge werden in deutscher, englischer, französischer oder italienischer Sprache publiziert, doch soll jeder *Originalarbeit* und *Kurze Mitteilung* eine kurze Zusammenfassung in einer andern als der Originalsprache beigegeben werden. *Abbildungsvorlagen* sollen reproduktionsfertig mit Reduktionsmaßstab versehen eingeliefert werden, hingegen soll die Beschriftung nur mit Bleistift, am besten auf einem lose vorgeklebten, durchsichtigen Papier ausgeführt werden. Autoren von Originalarbeiten, welche einen Umfang von mehr als 16 Druckseiten aufweisen, haben einen *Satzbeitrag* zu entrichten. Dieser beträgt sFr. 25.- pro Seite von der 17. bis 24. Seite, sFr. 40.- pro Seite von der 25. bis 32. Seite und sFr. 50.- pro Seite von der 33. Seite an. Die Verfasser von *Zusammenfassenden Berichten*, *Originalarbeiten* und *Kurzen Mitteilungen* erhalten 50 Gratisseparata ohne Umschlag.

ZAMP is published regularly every two months. All papers must be in the hands of the editor at least 12 weeks before publication of the issue. Manuscripts and all other correspondence concerning contribution to the periodical should be addressed to the *Editor*. Manuscripts of *Brief Reports* can be submitted 8 weeks before publication of the issue, if the authors dispense with proof-reading. The contributions will be published in English, German, French, or Italian; to each *Original Paper* and *Brief Report* should be added a brief summary in a language other than the original one. Drawings and photographs for *illustrations* should be sent ready for reproduction with indication of the proposed reduction; lettering of the illustrations should be entered in pencil, preferably on a loosely attached transparent sheet. Authors of *Original Papers* exceeding 16 printed pages are requested to pay a *contribution* of Sw.Frs. 25.- per page for pages 17-24, Sw.Frs. 40.- per page for pages 25-32, and Sw.Frs. 50.- per page for pages 33 and over. The authors of *Survey Articles*, *Original Papers*, and *Brief Reports* receive 50 free separata printed without cover.

ZAMP paraît régulièrement tous les deux mois. Derniers délais pour présenter les manuscrits: trois mois avant la parution de chaque numéro. Tous les manuscrits et toute correspondance relatifs à la rédaction sont à adresser au rédacteur. Les manuscrits pour des *communications brèves* peuvent être présentés huit semaines avant la parution, si les auteurs renoncent à contrôler les épreuves. Les articles seront publiés en langue française, anglaise, allemande ou italienne; cependant, chaque *article original* et toute *communication brève* devront être accompagnés d'un résumé en une autre langue. Les *illustrations* doivent être prêtes à la reproduction et il faudra y indiquer l'échelle de réduction. La légende devra être inscrite au crayon, de préférence sur papier transparent, légèrement collé à l'illustration. Pour articles originaux qui dépassent 16 pages imprimées, une *contribution* de frs.s. 25.- par page doit être payée pour les pages 17-24 et de frs.s. 40.- par page pour les pages 25-32; à partir de page 33 la contribution est de frs.s. 50.- par page. Les auteurs de *comptes rendus*, ainsi que ceux d'*articles originaux* et de *communications brèves* recevront 50 tirés à part sans couverture de leur article.

Jahresabonnement (6 Nummern): Schweizer Fr. 68.- (DM 68.-), Einzelnummer sFr. 14.-

Annual subscription (6 issues): Swiss francs 68.- (DM 68.-), single copy Sw. Frs. 14.-

Abonnement annuel (6 numéros): Francs suisses 68.- (DM 68.-), le numéro frs.s. 14.-

Postabonnement - Post-Office Subscription - Abonnement par office postal: Belgien, Dänemark, Finnland, Holland, Italien, Luxemburg, Marokko, Norwegen, Portugal, Schweden

Inserate - Advertisements - Annonces: $\frac{1}{4}$, Seite/page: Fr./DM 165.-, $\frac{1}{2}$, Seite/page: Fr./DM 88.-, $\frac{1}{4}$, Seite/page: Fr./DM 50.-

Alle Rechte, einschliesslich der Übersetzung und Reproduktion auf photostatischem Wege oder durch Mikrofilm, vorbehalten. - All rights, incl. translations and photostatic and microfilm reproduction reserved. - Tous droits, y compris traductions et reproductions photostatiques et par microfilm, réservés.

1959, Birkhäuser Verlag, Basel, Switzerland © Printed in Switzerland

A Note on the Position of the Centre of Flexure of a Beam of Isotropic Material Having a Section Bounded by a Parabola and a Straight Line

By AMITAVA CHAKRAVORTI, Calcutta, India¹⁾

Nomenclature

| | |
|---|---|
| x, y, z | rectangular co-ordinates; |
| l, m, n | direction cosines of outward drawn normal; |
| $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ | normal components of stress parallel to x, y, z axes; |
| $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ | shearing stress components in rectangular co-ordinates; |
| u, v, w | components of displacement; |
| $T(x, y)$ | stress function in rectangular coordinates; |
| σ | Poisson's ratio; |
| μ | shear modulus; |
| $\gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$ | shearing strain components in rectangular coordinates. |

1. Method of Solution

Let a beam of uniform cross section with a straight edge have one end $z = 0$ fixed and the other end $z = l$ loaded by some distribution of forces that is statically equivalent to a single force W acting parallel to the straight edge. At the end $z = 0$, axis of x is taken parallel to the load, y axis is taken perpendicular to the straight edge and z axis is taken along central line of the beam. Here x and y axes are parallel to principal axes of inertia at the centroid. The origin is at the middle point of straight edge.

Following the semi-inverse method of DE ST. VENANT, we assume

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \quad \text{and} \quad \sigma_z = -\frac{W}{I} (l - z) x, \quad (1.1)$$

where $I = \int \int x^2 dx dy$ over entire cross section.

From equations of equilibrium we get

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad (1.2)$$

¹⁾ Department of Mathematics, Brahmananda Keshab Chandra College.

and

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{W}{I} x = 0. \quad (1.3)$$

Equations (1.2) show that τ_{xz} and τ_{yz} are functions of x and y only. Equation (1.3) is satisfied if we assume

$$\tau_{xz} = \frac{\partial T}{\partial y} + S(y) - \frac{W}{2I} x^2, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial T}{\partial x}, \quad (1.4)$$

where $S(y)$ is a function of y to be so chosen as to yield a simple boundary condition. Beltrami-Michell compatibility equations reduce in this case to

$$\nabla^2 \tau_{zx} + \frac{1}{1+\sigma} \cdot \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial z} = 0, \quad \nabla^2 \tau_{yz} = 0.$$

Therefore from (1.4)

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\nabla^2 T(x, y) + \frac{dS}{dy} \right] = \frac{W}{I} \cdot \frac{\sigma}{1+\sigma}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 T(x, y) = 0.$$

Hence, we have

$$\nabla^2 T(x, y) = \frac{\sigma}{1+\sigma} \cdot \frac{W}{I} (y - y_0) - \frac{dS}{dy} - 2\mu\alpha, \quad (1.5)$$

where y_0 is y co-ordinate of centre of inertia of cross section. Local twist at point (x, y) of cross section is

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} \gamma_{yz} - \frac{\partial}{\partial y} \gamma_{zx} \right) \\ &= \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} \right) = -\frac{1}{2\mu} \left[\nabla^2 T(x, y) + \frac{dS}{dy} \right] \quad [\text{by (1.4)}] \\ &= -\frac{1}{2\mu} \left[\frac{\sigma}{1+\sigma} \cdot \frac{W}{I} (y - y_0) - 2\mu\alpha \right]. \quad [\text{by (1.5)}] \end{aligned}$$

Therefore mean local twist equals α .

We define centre of flexure as position of load point for which the mean local twist α is equal to zero. Then we can take $\alpha = 0$ in (1.5). Now let (\bar{x}, \bar{y}, l) be co-ordinates of centre of flexure. In our case since the load W acts parallel to a principal axis (x axis), hence x co-ordinate of centre of flexure is zero. $\bar{y} = y$ co-ordinate of centre of flexure is given by

$$-\bar{y} W = \iint_K (x \tau_{yz} - y \tau_{zx}) dx dy.$$

Let C denote boundary of cross section and R , the region within C . Then from (1.4)

$$\left. \begin{aligned} -\bar{y} W &= \iint_R \left[x \left(-\frac{\partial T}{\partial x} \right) - y \left\{ \frac{\partial T}{\partial y} + S(y) - \frac{W}{2I} x^2 \right\} \right] dx dy \\ &= \iint_R \left[2 T(x, y) + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ -x T(x, y) - x y S(y) + \frac{W}{6I} x^3 y \right\} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial y} \left\{ y T(x, y) \right\} \right] dx dy \\ &= 2 \iint_R T(x, y) dx dy + \int_C y T(x, y) dx \\ &\quad + \int_C \left[-x T(x, y) - x y S(y) + \frac{W}{6I} x^3 y \right] dy \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

(by GREEN'S theorem).

Again we have the boundary condition

$$l \tau_{xz} + m \tau_{yz} = 0,$$

i. e.

$$\frac{dy}{ds} \left[\frac{\partial T}{\partial y} + S(y) - \frac{W}{2I} x^2 \right] - \left(\frac{dx}{ds} \right) \left(-\frac{\partial T}{\partial x} \right) = 0,$$

i. e.

$$\frac{dT}{ds} + \left[S(y) - \frac{W}{2I} x^2 \right] \frac{dy}{ds} = 0.$$

The function $S(y)$ may be prescribed arbitrarily. We choose $S(y) = x^2 W/2I$ on C so that above condition becomes $dT/ds = 0$. We take $T = 0$ on C since the constant term does not affect the stresses. Then we see that $T(x, y)$ satisfies the differential equation

$$\nabla^2 T(x, y) = \frac{\sigma}{1 + \sigma} \cdot \frac{W}{I} (y - y_0) - \frac{dS}{dy} \quad (T = 0 \text{ on } C)$$

and $S(y) = x^2 W/2I$ on C except that $S(y)$ may take any value where $dy/ds = 0$.

Then from above considerations \bar{y} is simplified and we get from (1.6)

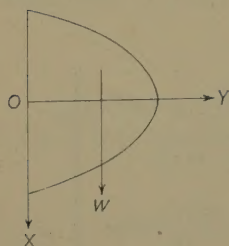
$$\bar{y} = -\frac{2}{W} \iint_R T(x, y) dx dy + \frac{1}{3I} \int_C x^3 y dy. \quad (1.7)$$

2. Section Bounded by a Parabola and a Straight Edge

Here we assume $(x + i y) = -i (\xi + i \eta)^2$.

Therefore

$$x = 2\xi\eta, \quad y = \eta^2 - \xi^2. \quad (2.1)$$



Then $\eta = \pm a$ gives the parabolic curved boundary

$$x^2 = 4 a^2 (a^2 - y). \quad (2.2)$$

The straight boundary is $y = 0$ or $\xi = \pm \eta$.
In this case

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{h^2} &= \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \right)^2 = 4(\xi^2 + \eta^2), \\ y_0 &= \frac{2 a^2}{5}, \quad I = \frac{32}{15} a^8. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

In this case on parabolic boundary C

$$S(y) = \frac{W}{2 I} x^2 = \frac{W}{2 I} 4 a^2 (a^2 - y).$$

Therefore $T(x, y)$ satisfies the differential equation

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 T(x, y) &= \frac{\sigma}{1 + \sigma} \cdot \frac{W}{I} (y - y_0) + \frac{2 W a^2}{I} \\ &= \frac{\sigma}{1 + \sigma} \cdot \frac{W}{I} y + \frac{2 W a^2}{5 I} \cdot \frac{(5 + 4 \sigma)}{1 + \sigma}. \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

$T = 0$ on $\eta = a$ and also on $y = 0$, i. e. $\xi = \pm \eta$. (2.4) is satisfied if we assume a particular solution of T ,

$$T_0 = A y (x^2 + 4 a^2 y) + B y^2 + C y, \quad (2.5)$$

where

$$A = \frac{\sigma W}{2 (1 + \sigma) I}, \quad B = \frac{W a^2}{5 I (1 + \sigma)} (5 - 6 \sigma). \quad (2.6)$$

$T_0 = 0$ on $y = 0$. But $T = 0$ on $\eta = \pm a$ also.

Therefore we assume

$$\begin{aligned} T &= T_0 + \sum_{m=0}^{\infty} C_{2m+1} \\ &\times \left[\cosh \frac{(2m+1)\pi\eta}{2a} \cos \frac{(2m+1)\pi\xi}{2a} - \cosh \frac{(2m+1)\pi\xi}{2a} \cos \frac{(2m+1)\pi\eta}{2a} \right]. \end{aligned}$$

This assumption of T satisfies differential equation (2.4) and gives $T = 0$ on $y = 0$, i. e. $\xi = \pm \eta$.

Since $T = 0$ on $\eta = a$ hence it is necessary that

$$\begin{aligned} 0 &= B \xi^4 - \xi^2 (4 A a^4 + 2 B a^2 + C) + a^2 (4 a^4 A + B a^2 + C) \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty} C_{2m+1} \cosh \frac{(2m+1)\pi}{2} \cos \frac{(2m+1)\pi\xi}{2a} \quad (-a < \xi < a). \end{aligned}$$

Putting

$$C = -4 a^4 A - B a^2 = -\frac{W a^4}{5 I} \cdot \frac{(5 + 4 \sigma)}{(1 + \sigma)}, \quad (2.8)$$

we see that the above condition reduces to

$$0 = B (\xi^4 - a^2 \xi^2) + \sum_{m=0}^{\infty} C_{2m+1} \cosh \frac{(2m+1)\pi}{2} \cos \frac{(2m+1)\pi \xi}{2a} \quad (-a < \xi < a).$$

This relation gives

$$C_{2m+1} = \frac{32 B a^4}{(2m+1)^3 \pi^3} \left[5 - \frac{48}{(2m+1)^2 \pi^2} \right] \frac{\sin(2m+1) \frac{\pi}{2}}{\cosh(2m+1) \frac{\pi}{2}} \quad (2.9)$$

$$(m = 0, 1, 2, 3, \dots),$$

where B is given by (2.6). Thus T is obtained. Now from (1.7) substituting the value of T we get coordinates of centre of flexure.

Here

$$\bar{y} = \frac{a^2 (25 + 12 \sigma)}{35 (1 + \sigma)} - \frac{512 a^4}{\pi^3 W} \sum_{m=0}^{\infty} C_{2m+1} \\ \times \left[\frac{\sin(2m+1) \frac{\pi}{2} \cosh(2m+1) \frac{\pi}{2}}{(2m+1)^3} - \frac{3 \sin(2m+1) \frac{\pi}{2} \sinh(2m+1) \frac{\pi}{2}}{\pi (2m+1)^4} \right].$$

Substituting values of C_{2m+1} from (2.9) we get

$$\bar{y} = \frac{a^2 (25 + 12 \sigma)}{35 (1 + \sigma)} - \frac{1536 a^2 (5 - 6 \sigma)}{\pi^6 (1 + \sigma)} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{5}{(2m+1)^6} - \frac{48}{\pi^2 (2m+1)^8} \right] \\ + \frac{4608 a^2 (5 - 6 \sigma)}{\pi^7 (1 + \sigma)} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{5 \tanh(2m+1) \frac{\pi}{2}}{(2m+1)^7} - \frac{48 \tanh(2m+1) \frac{\pi}{2}}{\pi^2 (2m+1)^9} \right].$$

Next using the results [2]²⁾

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}, \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^8} = \frac{17 \pi^8}{2^5 \cdot 7!}$$

we get

$$\bar{y} = \frac{(12 \sigma - 3) a^2}{7 (1 + \sigma)} + \frac{4608 a^2 (5 - 6 \sigma) a^2}{\pi^7 (1 + \sigma)} \\ \times \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{5}{(2m+1)^7} - \frac{48}{\pi^2 (2m+1)^9} \right] \tanh(2m+1) \frac{\pi}{2}. \quad (2.10)$$

The infinite series occurring in (2.10) are rapidly convergent.

²⁾ Numbers in brackets refer to References, page 338.

Let us consider those two series.

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^7} \tanh(2m+1) \frac{\pi}{2} = \tanh \frac{\pi}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^7} \tanh(2m+1) \frac{\pi}{2}.$$

Now

$$\tanh \frac{\pi}{2} > 0.9 \quad \text{and} \quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^7} \tanh(2m+1) \frac{\pi}{2}$$

is smaller than

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^7} = 0.0005$$

approximately. Hence for practical purposes we may take only first term of series

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^7} \tanh(2m+1) \frac{\pi}{2}.$$

Similarly from the series

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^9} \tanh(2m+1) \frac{\pi}{2}$$

we take first term. Then

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{(12\sigma - 3)a^2}{7(1+\sigma)} + \frac{4608(5-6\sigma)a^2}{\pi^7(1+\sigma)} \left(5 - \frac{48}{\pi^2}\right) \tanh \frac{\pi}{2} \quad (\text{approximately}) \\ &= \frac{(12\sigma - 3)a^2}{7(1+\sigma)} + \frac{0.191(5-6\sigma)a^2}{1+\sigma} \quad (\text{approximately}). \end{aligned}$$

If we take $\sigma = 0.3$ then $\bar{y} = 0.536 a^2$ (approximately). It may be observed that x co-ordinate of centre of flexure is zero.

In conclusion the author expresses his deep gratitude to Prof. B. SEN, D. Sc., F. N. I. for his guidance and helpful suggestions.

REFERENCES

- [1] I. S. SOKOLNIKOFF, *Mathematical Theory of Elasticity*, 2nd ed. (McGraw-Hill Book Company, Inc., 1956), pp. 237-239.
- [2] B. O. PIERCE, *A Short Table of Integrals*, 3rd ed. (Ginn and Company), p. 90.

Zusammenfassung

Die vorliegende Notiz behandelt das Problem der Auffindung des Biegeungszentrums eines aus isotropem Material bestehenden Balkens, der einen durch eine parabolische und eine geradlinige Kante begrenzten Querschnitt besitzt. Die Last ist parallel zur geradlinigen Kante angenommen. Der Verfasser benützt zur Lösung der Aufgabe dasselbe Verfahren, das SOKOLNIKOFF [1] für die Auffindung des Biegeungszentrums eines halbkreisförmigen Balkens verwendete.

(Received: November 13, 1958.)

Der Analog-Interpolator

VON THEODOR ERISMANN, ETH, Zürich

Problemstellung

Das ungeheure Zahlenmaterial, das moderne programmgesteuerte Rechenautomaten zu liefern vermögen, macht die Auswertung der gerechneten Resultate gelegentlich zu einem schwierigen Problem. Dies gilt besonders dort, wo die übliche Ausgabe in Form von Zahlentabellen (allenfalls auf Lochkarten oder ähnlichen Trägern gespeichert) ungeeignet ist, weil eine anschauliche Darstellung des Resultats oder dessen Weiterverarbeitung in Analogform (etwa zur Steuerung von Werkzeugmaschinen) gewünscht wird.

Die bekannten elektrischen Digital-Analog-Umformer sind zwar zur Veranschaulichung der Rechenresultate durchaus geeignet, doch scheiden sie überall dort aus, wo hohe Genauigkeiten erforderlich sind (Kurvenscharen in Rechenblättern, Fräsen von Schaufelprofilen usw.). Zudem erfordert ihre diskrete Arbeitsweise die Berechnung einer sehr grossen Anzahl von Punkten, sofern man nicht nachträglich noch zum Kurvenlineal oder zu ähnlichen behelfsmässigen Interpolationsmitteln greifen will.

Ein Gerät, das die geschilderten Aufgaben zu lösen hat, sollte also die folgenden Eigenschaften in sich vereinigen:

1. Umformung der verarbeiteten Zahlen aus der Codesprache des Rechenautomaten in eine stetig sich ändernde Analogiegrösse.
2. Möglichst geringer Genauigkeitsverlust der Analogdarstellung gegenüber der Digitaldarstellung.
3. Möglichst geringer Zeitverlust zwischen der Eingabe in Digital- und der Ausgabe in Analogform.

Ein solches Gerät wird in der Folge als *Analog-Interpolator* bezeichnet.

Das Interpolationsverfahren

Der Übergang von der diskreten zur stetigen Darstellung erfordert ein Interpolationsverfahren, das nach dem oben Gesagten folgenden Bedingungen genügen muss:

1. Die interpolierte Funktion muss mindestens mit der durch ihre weitere Verwendung bedingten Genauigkeit durch eine beliebige Anzahl von Punkten gelegt werden können.

2. Im Hinblick auf die praktische Verwendung (Oberflächenglätte usw.) muss die interpolierte Funktion stetig sein. Von der zweiten Ableitung an sind Sprünge normalerweise zulässig.

3. Die interpolierte Funktion muss bei laufender Eingabe der Koordinaten für die aufeinanderfolgenden Punkte laufend gebildet werden. Zur Bestimmung ihres Verlaufes zwischen den benachbarten Punkten P_{i-1} und P_i sollte nach Möglichkeit die Kenntnis der Koordinaten vom Anfangspunkt P_0 bis P_i genügen.

Auf den ersten Blick scheint eine aus quadratischen Parabelbogen zusammengesetzte Funktion den erwähnten Bedingungen bei bescheidenem technischem Aufwand zu genügen: Ist der Verlauf der Funktion bis zum Punkt P_{i-1} gegeben, so gibt es eine und nur eine Parabel, die in P_{i-1} bezüglich des Funktionswertes und der ersten Ableitung mit dem vorhergehenden Teilbogen übereinstimmt und durch den nächstfolgenden Punkt P_i geht. Einer Fortsetzung des Verfahrens ad libitum steht also nichts im Wege.

Leider zeigt sich aber bei näherer Betrachtung, dass die beschriebene Parabelbogen-Interpolation eine gewisse Verwandtschaft mit dem Verhalten eines ungedämpft schwingungsfähigen Gebildes aufweist: Liegen beispielsweise in einem gewissen Bereich die Stützpunkte der Funktion äquidistant auf der Abszissenachse, so geht die interpolierte Funktion nicht etwa nach einigen Teilbogen in diese Achse über, sondern pendelt – wie man sich leicht überzeugen kann – in gleichmässig wiederholten Parabelbogen beliebig häufig weiter um dieselbe. Es ist klar, dass ein solches Verfahren, dessen periodische Fehler offenbar sowohl von den Anfangsbedingungen als auch vom Verlauf der interpolierten Punktfolge abhängen, in der Praxis genauigkeitsmässig unkontrollierbar (und unter Umständen sogar instabil) ist und dass nur bei Einführung einer wirksamen «Dämpfung» Aussicht auf Erfolg besteht.

Der Grundgedanke einer solchen Dämpfung geht aus Figur 1 hervor, welche die Umgebung eines Teilbogens darstellt. Hier wird die Parabel nicht durch die Punkte P_{i-1} und P_i , sondern durch zwei um den kleinen konstanten Betrag e nach links verschobene Punkte Q_{i-1} und Q_i gelegt. Zwar wird von Q_{i-1} aus der durch P_i gehende Parabelbogen angesetzt, doch wird dieser nur bis Q_i geführt, von wo der nächste Teilbogen nach P_{i+1} bzw. Q_{i+1} begonnen wird.

Unter Verwendung des aus Figur 1 ersichtlichen Koordinatensystems ξ, y und der ebendort abzulesenden Bezeichnungen Δx und μ erhält man für den Parabelbogen (gegeben durch den Funktionswert $y_{Q_{i-1}}$ im Punkt Q_{i-1} , die nach ξ bzw. x gebildete Ableitung $y'_{Q_{i-1}}$ im gleichen Punkt und den Funktionswert y_{P_i} im Punkt P_i) die Gleichung

$$y = y_{Q_{i-1}} + \xi y'_{Q_{i-1}} + \xi^2 \left(\frac{y_{P_i} - y_{Q_{i-1}}}{\mu^2 \Delta x} - \frac{y'_{Q_{i-1}}}{\mu \Delta x} \right). \quad (1)$$

Damit ist der Verlauf dieses Teilbogens vollständig umschrieben. Insbesondere

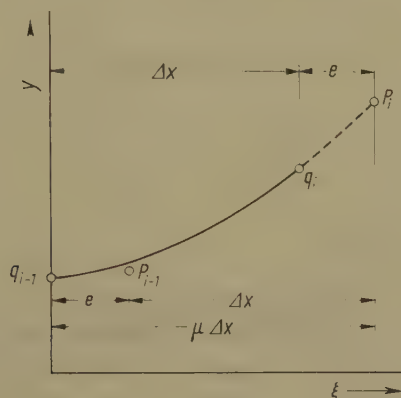
ist die Bestimmung der massgebenden Werte im Punkt Q_i möglich, die sich mit

$$y_{Q_i} = y_{Q_{i-1}} \frac{\mu^2 - 1}{\mu^2} + y'_{Q_{i-1}} \Delta x \frac{\mu - 1}{\mu} + \frac{y_{Pi}}{\mu^2} \quad (2)$$

und

$$y'_{Q_i} = -y_{Q_{i-1}} \frac{2}{\mu^2 \Delta x} + y'_{Q_{i-1}} \frac{\mu - 2}{\mu} + y_{Pi} \frac{2}{\mu^2 \Delta x} \quad (3)$$

ergeben und als Ausgangsbasis für die Ermittlung des nächsten Teilbogens dienen.



Figur 1

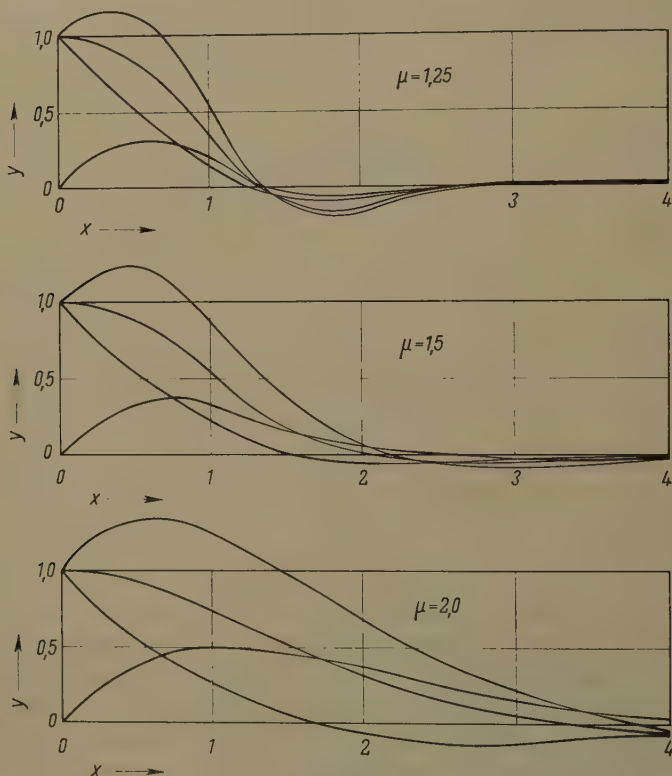
Prinzip der gedämpften parabolischen Interpolation. Erläuterungen im Text.

Trotz ihrer Einfachheit sind diese Formeln für eine umfassende theoretische Analyse des Verfahrens über mehrere Teilbogen äusserst umständlich, weil sie beim Übergang von einem Teilbogen zum nächsten zu immer längeren und undurchsichtigeren Ausdrücken führen. Es erweist sich daher als zweckmässiger, eine Anzahl typischer konkreter Fälle durchzurechnen. Wird dabei systematisch vorgegangen, so können die Ergebnisse hinsichtlich ihres praktischen Wertes denen einer rein theoretischen Analyse gleichgestellt werden.

Zunächst wird der bereits erwähnte Fall einer äquidistanten Punktfolge auf der Abszissenachse betrachtet. Dabei genügt für einen vollständigen Überblick die Variation der drei Parameter μ , y_0 und y'_0 . Wie aus Figur 2 ersichtlich, spielt μ die Rolle eines Dämpfungskoeffizienten, der selbst bei ungünstigsten Anfangsbedingungen ein rasches «Einschwingen» auf den Sollwert gestattet und etwa von $\mu - 1,5$ an einen praktisch aperiodischen Verlauf sicherstellt. Damit sind alle Voraussetzungen für eine vollständige Beherrschung der Verhältnisse gegeben.

Die Durchleuchtung des vorliegenden Falles ist trotz seiner Einfachheit sehr wertvoll, da der Gültigkeitsbereich der gewonnenen Resultate durch die fol-

genden Betrachtungen ganz wesentlich erweitert werden kann: Liegt die Punktfolge nicht auf der Abszissenachse, sondern auf einer beliebigen quadratischen Parabel, so lässt sich leicht zeigen, dass die Differenzen zwischen den Ordinaten der interpolierten Funktion und der durch die Punktfolge gehenden Parabel –



Figur 2

Einschwingen aus verschiedenen charakteristischen Anfangsbedingungen für verschiedene Werte des Dämpfungskoeffizienten μ .

abgesehen von einer sinngemässen Transformation der Anfangsbedingungen – identisch sind mit den Ordinaten der interpolierten Funktion im oben behandelten Fall. Mit anderen Worten: Das rasche Einschwingen auf vernachlässigbare Fehlerwerte und die wirksame Dämpfung bleiben auch dann in vollem Umfang erhalten, wenn die Punktfolge in einem über einige Teilstücke gehenden Bereich auf einer quadratischen Parabel liegt.

Damit ist das Verhalten des Verfahrens für alle diejenigen Fälle abgeklärt, in denen die Fehler nur durch die Anfangsbedingungen entstehen, während

bei richtiger Wahl dieser letzteren die interpolierte Funktion vollständig mit dem durch die Punktfolge gehenden höchstens quadratischen Polynom übereinstimmt. Dagegen bleibt die Frage nach der Güte des Verfahrens bei der Interpolation beliebiger anderer Funktionen noch offen. Für die praktische Beurteilung genügt dabei die Untersuchung des Falles einer kubischen Parabel. In der Tat lässt sich jede beliebige Funktion in einem gewissen Bereich stets um eine Grössenordnung besser durch eine kubische als durch eine quadratische Parabel approximieren.

Die etwas umständliche Berechnung der Fehler bei der Interpolation einer kubischen Parabel kann im Rahmen dieser Abhandlung nicht in extenso behandelt werden. Dagegen seien hier die Ergebnisse einer solchen Untersuchung in knapper Form zusammengestellt:

1. Folgt die zu interpolierende Funktion über mehrere Teilstücke einer kubischen Parabel, so streben die Fehler in den Punkten Q_i rasch gegen einen konstanten Wert Δy_∞ , der durch die Beziehung

$$\Delta y_\infty = y''' \frac{\Delta^3 x}{6} \mu \left(\mu - \frac{1}{2} \right) (\mu - 1) \quad (4)$$

gegeben ist. Diese Fehler haben somit systematischen Charakter, was die Bezeichnung «systematische kubische Fehler» rechtfertigt.

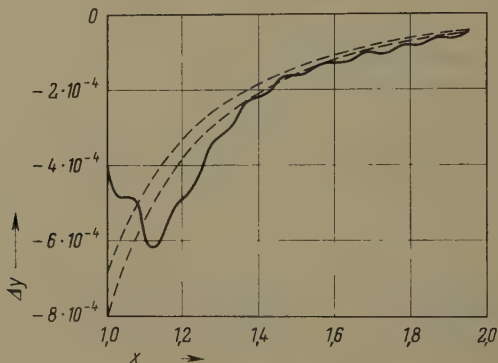
2. Innerhalb jedes Teilbogens überlagert sich dem systematischen kubischen Fehler ein weiterer Fehler δy , der ebenfalls rasch einem für jeden Teilbogen gleichförmigen Verlauf zustrebt und daher als «periodischer kubischer Fehler» bezeichnet werden darf. Dieser Fehler verschwindet für $\xi = 0$ und $\xi = \Delta x$ und erreicht zwei Extremwerte etwa bei $\xi = 0,21 \Delta x$ und $\xi = 0,79 \Delta x$. Der Absolutwert dieses Fehlers an den bezeichneten Stellen kann durch die Formel

$$|\delta y_{\infty \max}| \cong 0,008 y''' \Delta^3 x \quad (5)$$

ausgedrückt werden.

Es überrascht keineswegs, dass beide Fehler – der systematische wie der periodische – der dritten Ableitung der interpolierten Funktion proportional sind; ist doch eben das Vorhandensein dieser Ableitung das Unterscheidungskriterium zwischen der quadratischen und der kubischen Parabel. Dagegen ist es bemerkenswert, dass der periodische Fehler vom «Dämpfungsfaktor» μ unabhängig ist. Im übrigen ist die Amplitude des periodischen Fehlers für die in Frage kommenden Werte von μ in der Grössenordnung von 1,5 stets beträchtlich kleiner als der systematische Fehler. Das Pendeln um diesen letzteren darf als durchaus harmlos bezeichnet werden (für $\mu = 1,5$ ist $\Delta y_\infty \cong 15,6 |\delta y_{\infty \max}|$). Sehr wesentlich ist schliesslich die Abhängigkeit beider Fehler von der dritten Potenz der Schrittlänge Δx , die – bei wenigstens approximativem Kenntnis der dritten Ableitung von y – ein einfaches Mittel zur Beherrschung der Fehlergrössen darstellt.

Im Rahmen der Untersuchung von Punktfolgen, die in x äquidistant sind, bleibt nur noch die Frage offen, wie sich die Interpolation von Funktionen gestaltet, deren dritte Ableitung nicht konstant ist, und zwar insbesondere dann, wenn für die Wahl der Anfangsbedingungen nur die Kenntnis des Funktionswertes und der ersten Ableitung im Anfangspunkt vorausgesetzt wird. Aus einer grösseren Anzahl von Funktionen, die zur Abklärung dieser Frage untersucht wurden, sei als besonders ungünstiger Fall die Hyperbel $y = 1/x$ im Bereich $1 < x < 2$, also unweit der Singularität in $x = 0$, herausgegriffen. Wie



Figur 3

Fehlerverlauf bei Interpolation einer auf der Hyperbel $1/x$ liegenden Punktfolge. Schrittgrösse $\Delta x = 0,1$, Dämpfungskoeffizient $\mu = 1,5$. Anfangsbedingungen durch Funktionswert und erste Ableitung im Punkt $x = 0,9$ gegeben.

Figur 3 zeigt, erreicht auch hier der Fehler sehr rasch Werte, die annähernd im Rahmen der theoretisch vorausbestimmten Grenzen $\Delta y_{\infty} \pm |\delta_{\infty \max}|$ (gestrichelte Kurven in der Abbildung) liegen. Übrigens wird man beachten, dass die Fehler trotz der verhältnismässig grossen Schrittlänge $\Delta x = 0,1$ bereits ausserordentlich klein sind.

Damit darf festgestellt werden, dass das Verfahren – wenigstens für in x äquidistante Punktfolgen – den eingangs formulierten Bedingungen entspricht und insbesondere folgende Eigenschaften besitzt:

1. Weitgehende Unempfindlichkeit gegenüber ungünstiger Wahl der Anfangsbedingungen.
2. Verhältnismässig leichte Bestimmbarkeit der zu erwartenden Fehler.
3. Einfache Mittel zur Reduktion der Fehler auf beliebig kleine Werte (durch Reduktion der Schrittlänge).
4. Möglichkeit zur Glättung zufälliger Unregelmässigkeiten (Streuungen) der Punktfolge (durch Wahl des Dämpfungsfaktors μ).

Ist die Punktfolge in x nicht äquidistant, so sind keine wesentlichen Überraschungen zu erwarten, wenn die Schrittlänge sich nach einem stetigen Gesetz

ändert. Immerhin ist bei der Fehlerabschätzung einige Vorsicht am Platze, da die oben dargelegten Beziehungen nur unter gewissen Umständen in vollem Umfang anwendbar sind. In der Praxis wird man bei zweidimensionalen Problemen allerdings sehr oft eine Parameterdarstellung $x(i)$, $y(i)$ wählen, in der die Ordnungszahl i als gemeinsame unabhängige Veränderliche auftritt und die Schrittlänge mit $\Delta i = 1$ konstant ist. Diese Darstellung gestattet zudem die Beherrschung gewisser Fälle, die der expliziten Form $y(x)$ bei parabolischer Interpolation nicht zugänglich sind (Durchgang durch vertikale Tangenten, geschlossene Kurven usw.).

Die technische Verwirklichung

Das Gerät muss offenbar aus zwei Hauptteilen bestehen, nämlich einem Digital-Analog-Umformer und dem eigentlichen Interpolator, an den dann die entsprechenden Registrier- oder Arbeitsgeräte angeschlossen werden.

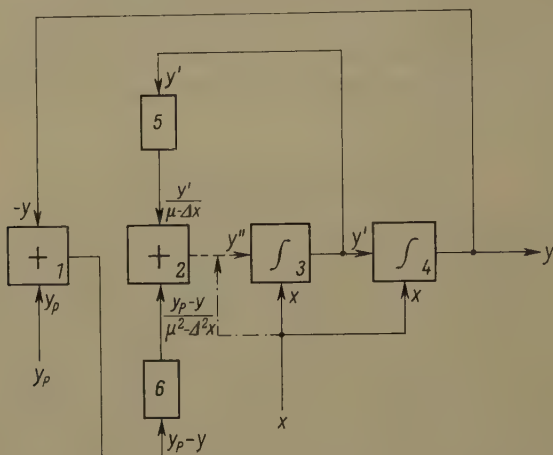
Die technischen Mittel der *Digital-Analog-Umformung* sind bekannt und bedürfen keiner weiteren Erklärungen. Als digitalen Eingang wird man normalerweise nicht den Rechenautomaten selbst, sondern einen geeigneten Zwischenträger (Lochkarte, Magnetband usw.), bei einfacheren Geräten sogar nur eine Tastatur benützen. Da es sich meist um die Steuerung mechanischer Vorrichtungen (Registriergeräte, Werkzeugmaschinen usw.) handeln und in vielen Fällen eine sehr hohe Genauigkeit verlangt werden dürfte, kommt als Analogiegrösse wohl nur der Umdrehungswinkel einer Welle in Betracht, der als einzige leicht verarbeitbare Analogiegrösse durch Wahl eines genügend grossen Übersetzungsverhältnisses eine beliebige Genauigkeit auf beschränktem Raum gestattet.

Der Aufbau des eigentlichen *Interpolators* ergibt sich in einfachster Weise durch Anwendung der Schaltungstechnik für Integrieranlagen: Durch zweimalige Differentiation und anschliessende zweimalige Integration der Beziehung (1) erhält man

$$y = 2 \iint \left(\frac{y_{Pi} - y_{Qi-1}}{\mu^2 \Delta^2 x} - \frac{y'_{Qi-1}}{\mu \Delta x} \right) dx^2,$$

woraus ersichtlich ist, dass zur Darstellung von y zwei Integratoren 3 und 4 in der Schaltung gemäss Figur 4 erforderlich sind. Das Schema bedarf nur weniger Bemerkungen zu seiner Erläuterung: Während der Berechnung eines Teilbogens ist y'' konstant, und die Integratoren rechnen daraus bei kontinuierlicher Eingabe von x laufend die interpolierten y -Werte. Die Verbindung zwischen dem Summentrieb 2 und dem Integrator 3 ist während dieses Vorganges unterbrochen (gestrichelte Linie). In einem beliebigen Zeitpunkt wird der nächste Wert für y_P am Summentrieb 1 eingegeben, so dass beim Erreichen des nächsten Punktes der Q -Reihe am Ausgang des Summentriebes 2 der neue Wert für y'' bereitsteht. In diesem Augenblick wird der Antrieb nach x unter-

brochen und durch eine (gemäss der strichpunktierten Linie gemeinsam mit x gesteuerte) geeignete Nachlaufsteuerung die Verbindung zum Integrator 3 hergestellt. Damit ist das Gerät zur Berechnung des nächsten Teilbogens bereit. Die Getriebe 5 und 6 dienen zur Einführung der Konstanten μ und Δx .



Figur 4

Interpolationsschaltung mit stufenlosen Getrieben (Integratoren).

Am Rande sei erwähnt, dass das System von Teilbogen zu Teilbogen selbstkorrigierend wirkt, weshalb die Rechenelemente nur bescheidenen Genauigkeitsforderungen zu genügen brauchen. Ferner ist zu bemerken, dass bei genügend rascher Arbeit der Nachlaufsteuerung für y'' gegebenenfalls mit kontinuierlich fortlaufendem Antrieb nach x gearbeitet werden kann.

Anwendungsmöglichkeiten

Der Analoginterpolator kann in erster Linie zwei Aufgaben erfüllen: Die Veranschaulichung der Resultate digitaler Berechnungen und die Automatisierung gewisser Produktionsvorgänge.

Im ersten Fall wird man das Gerät direkt mit einem geeigneten Registrierapparat koppeln, wobei gegenüber anderen Verfahren vor allem die hohe Genauigkeit ausgenützt werden dürfte, die es gestattet, hochpräzise Kurvenblätter für nomographische und ähnliche Rechen- und Auswertungsarbeiten herzustellen.

Noch nützlicher dürfte der Einsatz des Analoginterpolators für die Automatisierung von Produktionsvorgängen sein. Insbesondere bei der Herstellung kleiner Stückzahlen (Prototypen und Nullserien) von Leitkurven, Nocken, Schaufelprofilen und ähnlichen Körpern, wo die Anfertigung von Modellen für

Kopierfräsmaschinen sich nicht lohnt, steht ein wesentliches Betätigungsfeld offen. Dabei kann der Interpolationsvorgang entweder einmal durchgeführt und das Resultat in kontinuierlicher Weise (etwa mittels hochpräziser polydromer Funktionsdarstellung) auf einem analog arbeitenden Zwischenträger registriert werden, worauf es bei der Herstellung jedes Stückes durch eine mit der Werkzeugmaschinensteuerung verbundene geeignete Abtastvorrichtung abgetastet wird. Oder aber der Analoginterpolator wird selber zu einem Teil der Werkzeugmaschinensteuerung und führt die Interpolation – gesteuert von einem digitalen Zwischenträger (etwa einem Stoss Lochkarten) – bei der Herstellung jedes Stückes von neuem durch. Angesichts der zahlreichen Argumente, die sich zugunsten beider Lösungen anführen lassen, wird die Praxis zeigen müssen, welche die grösseren Aussichten auf einen dauernden Erfolg besitzt.

Summary

The paper deals with a new method for transforming digital data tables into continuous shaft rotations. The method is characterized by a special type of parabolic interpolation incorporated into the analog part of the machine and conceived in a way to allow for perfect stability and smoothness of output. Formulae are given for predetermining the errors of the system for interpolating any desired function.

(Eingegangen: 8. Dezember 1958.)

The Dynamics of Turbo-Flow

By FAUSTO G. GRAVALOS, Philadelphia, USA¹⁾

Foreword

This work is essentially a dynamic analysis of the steady, axially symmetric flow of an inviscid, incompressible fluid through a turbo-machine.

From the point of view of dynamics, the condition of axial symmetry makes it necessary to assume a field of forces physically equivalent to the presence of the blade row. This concept of force field appears – through rather vaguely – first in LORENZ' [1]²⁾. VON MISES [2] defined the axial symmetric turbo-flow model by means of purely kinematic concepts; his equation has been quoted often in recent literature, but only MEYER [3] and MARBLE [4] show a true understanding of its meaning.

¹⁾ Consulting Engineer, MSVD General Electric Company, Philadelphia, Pa., USA. (This work, finished in August 1953, was done while the author was at the Aircraft Gas Turbine Division of the General Electric Company, Cincinnati, Ohio.)

²⁾ Numbers in brackets refer to References, page 380.

From a physical point of view, the turbo-flow problem – under the above hypothesis – is reduced to the proper definition of the force field, \mathbf{F} , so as to represent a blade row.

From an analytical standpoint, the problem is to set down the conditions of compatibility between the equation of continuity and the three Euler equations.

In the last years many attempts have been made to solve this problem. The writer showed [5] that if the component of \mathbf{F} along the normal to the streamlines is zero, the problem reduces to the solution of STOKES' stream function and the integration of a set of ordinary differential equations. Naturally, this hypothesis cannot represent the general case.

What has been missing is a clear-cut formulation of the problem. This is accomplished in part 4; to do so, it is necessary to analyze the geometric structure and the dynamic characteristics of potential force flows. This is done in part 3. From this study, there result two possible generalizations of potential force flows:

- (1) *von Mises flows;*
- (2) *quasi-potential flows.*

This classification results from the manner in which a 'blade' is defined. When the flow is Lorenz – i. e. when the constant in EULER'S integral does not vary with ψ – both types of flows coincide. Therefore, the solution of quasi-potential force fields given here implies the solution of VON MISES' equation.

The study of flows with the initial assumption that \mathbf{F} be equal to $\alpha(r, z) [\text{grad } \theta - f(r, z)]$ appears in GOLDSTEIN [6], who deals with the direct problem for radial blades and in MONROE'S [7] thesis. These authors are, however, not concerned with the problem as stated here.

Parts 1 and 2 are of an introductory nature. Part 2, however, is essential to the understanding of the vorticity field.

In part 5, where an illustrative example is worked out, the important role that numerical analysis plays in modern technology is brought to the surface.

Nomenclature

| Symbol | | Dimensions |
|----------------|------------------------|-------------|
| a | a constant | L^2T^{-2} |
| B | blade surface | 0 |
| \mathbf{C} | velocity vector | LT^{-1} |
| C | speed | LT^{-1} |
| \mathbf{C}_a | average axial velocity | LT^{-1} |
| d | diameter | L |
| \mathbf{F} | force per unit mass | LT^{-2} |
| f | blade shape function | 0 |

| Symbol | | Dimensions |
|--------------|--|------------------|
| g | angular momentum per unit mass ($g = C_\theta r$) | $L^2 T^{-1}$ |
| h | blade height | L |
| H | $= \frac{1}{2} C^2 + \int \frac{dp}{\rho}$ BERNOULLI's constant (stator) | $L^2 T^{-2}$ |
| H^* | $= \frac{1}{2} C^2 + \int \frac{dp}{\rho} - \omega C_\theta r$ BERNOULLI's constant (rotor) | $L^2 T^{-2}$ |
| k | a constant | $L^2 T^{-2}$ |
| K | a parameter | $L^{-1} T^{-1}$ |
| p | pressure | $ML^{-1} T^{-2}$ |
| r | radius, distance from axis | L |
| R_0 | outer radius | L |
| R_i | hub or inner radius | L |
| s | arc length | L |
| t | time | T |
| \mathbf{u} | a unit vector | depending on use |
| \mathbf{W} | relative velocity | LT^{-1} |
| α | load function | $L^2 T^{-2}$ |
| Γ | family of surfaces | 0 |
| δ | a parameter | 0 |
| ζ | r -component of vorticity | T^{-1} |
| η | θ -component of vorticity | T^{-1} |
| θ | angle or direction | 0 |
| κ | a parameter | 0 |
| ξ | z -component of vorticity | T^{-1} |
| π | the number | 0 |
| ρ | density | ML^{-3} |
| Φ | a function | $L^{-1} T^{-1}$ |
| φ | direction or angular coordinate in rotors | 0 |
| ψ | stream function | $L^2 T^{-1}$ |
| ω | angular velocity | T^{-1} |
| Ω | vorticity vector | T^{-1} |
| Ω | vorticity | T^{-1} |

The subscripts on C , W , and F indicate components of \mathbf{C} , \mathbf{W} , and \mathbf{F} along the corresponding directions. Use has been made of $C_r = W_r$, $C_z = W_z$. Subscripts on \mathbf{u} indicate the direction of the unit vector. Subscripts on any other letter indicate the derivative with respect to the subscript, with the exception

of the subscripts $o, i, 1$, and 2 , the meaning of which is specified in the text. The total time derivative, d/dt is sometimes referred to as material derivative. This unnecessary terminology has been avoided.

1. Geometric Preliminaries

1.1 Cylindrical Coordinates

A stationary $-r, \theta, z$ - and a moving $-r, \varphi, z$ - system of cylindrical coordinates will be used. The space orientation is defined by the cyclic order r, θ, z - or r, φ, z - so that from r the positive sense of rotation is from θ to z ; from θ , the positive sense of rotation is from z to r , etc.

These two systems of coordinates are related by

$$\theta = \varphi + \omega t, \quad \omega = \text{angular velocity} \quad (1.1)$$

and the homologous components of any vector \mathbf{A} in space are the same in both systems.

With this convention, the components of $\boldsymbol{\Omega} = \text{curl } \mathbf{C}$ are given, in the axially symmetric case, by

$$\xi = -\frac{1}{r} g_z, \quad (1.2)$$

$$\eta = \frac{\partial C_r}{\partial z} - \frac{\partial C_z}{\partial r}, \quad (1.3)$$

$$\zeta = \frac{1}{r} g_r. \quad (1.4)$$

Since the choice of sign in the definition of the stream function

$$C_r = \frac{1}{r} \psi_z, \quad (1.5)$$

$$C_z = -\frac{1}{r} \psi_r \quad (1.6)$$

is essentially arbitrary and it determines the sign in the Stokes' equation

$$\psi_{rr} - \frac{1}{r} \psi_r + \psi_{zz} = r \eta \quad (1.7)$$

obtained by expressing η in terms of ψ , it will be shown that this arbitrariness is only apparent.

At the outset the sense of flow, a physical data, from left to right or from right to left, determines uniquely the sign of the stream function ψ . If the system is clockwise, ψ is positive (Figure 1a). For the other case ψ is negative

(Figure 1b). In both cases, the sense of increasing ψ , given by \mathbf{u}_ψ , is obtained by a negative $\pi/2$ rotation of the vector \mathbf{C}_M , i. e.,

$$\mathbf{u}_\psi: \left(-\frac{C_z}{C_M}, 0, \frac{C_r}{C_M} \right). \quad (1.8)$$

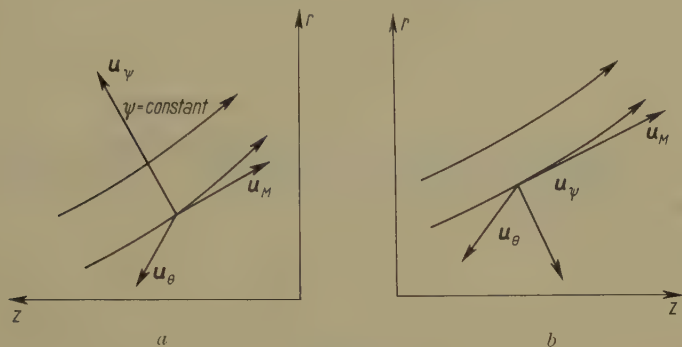


Figure 1

(a) Clockwise; (b) counterclockwise.

This can be proven easily. If ds_ψ indicates the lineal element along the \mathbf{u}_ψ direction, the differential of ψ along \mathbf{u}_ψ is given by

$$d_\psi \psi = [\psi_r \cos(u_\psi, r) + \psi_z \cos(u_\psi, z)] ds_\psi$$

and use of (1.5), (1.6) and (1.7) yields,

$$\text{grad}_\psi \psi = r C_M \quad (1.9)$$

an essentially positive quantity.

The positive sense corresponding to η in both cases, (a) and (b), is shown in Figure 2, and it is seen that the choice of orientation in space and the selection

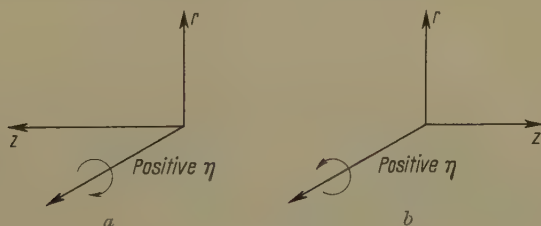


Figure 2

of sign in (1.5) and (1.6) are irrelevant and, therefore, (1.7) relates ψ and η in a unique manner, where both ψ and η have definite physical meaning as to sign, direction of flow and sense of rotation.

1.2 Natural Coordinates

In this system the coordinate lines in the meridional planes, $\theta = \text{const}$, are given by $\psi(r, z) = \text{const}$ and the family of curves $M(r, z) = \text{const}$ normal to ψ . The third direction θ is the normal to $\theta = \text{const}$; unit vector $\mathbf{u}_\theta: (0, 1, 0)$.

Taking for positive sense along the ψ -curves that of the flow, the corresponding unit vector is

$$\mathbf{u}_M: \left(\frac{C_r}{C_M}, \quad 0, \quad \frac{C_z}{C_M} \right) \quad (1.10)$$

and for positive sense along the M -curves that of increasing ψ , the unit vector is \mathbf{u}_ψ of (1.8) and the cyclic order $\mathbf{u}_M, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_\psi$ gives the same orientation of the space as r, θ, z in all cases.

In this system

$$\mathbf{C}: (C_M, C_\theta, 0), \quad (1.11)$$

$$\mathbf{W}: (C_M, W_\psi, 0) \quad (1.12)$$

and the components of $\mathbf{\Omega}: (\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$ in this system are easy to obtain from (1.2), (1.3), (1.4), (1.8) and (1.10)

$$\bar{\xi} = \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{u}_M = \frac{1}{r} \text{grad}_\psi g = -C_M g_\psi, \quad (1.13)$$

$$\bar{\eta} = \eta, \quad (1.14)$$

$$\bar{\zeta} = \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{u}_\psi = \frac{1}{r C_M} \cdot \frac{d}{dt} g. \quad (1.15)$$

As it is shown in Figure 1, the selection of sense in a natural system determines the sense that must be given to the corresponding system of cylindrical coordinates.

2. The Force Field

2.1 General Properties

If an axially symmetric flow is to provide a model of the flow through a turbo-machine, it is necessary to assume the existence of a field of forces \mathbf{F} , acting upon the fluid and replacing a given blade row. The angular component F_θ of \mathbf{F} must naturally be different from zero.

From a physical point of view the problem is then to define adequately the force field \mathbf{F} so as to represent a blade row.

Since the fluid is assumed inviscid, the force field must be non-dissipative, i. e., it must do no work in the absolute motion through a stator-field, or in the relative motion through a rotor-field.

Since

$$\mathbf{C} \times \boldsymbol{\Omega} - \mathbf{W} \times \boldsymbol{\Omega} = \omega \operatorname{grad} g, \quad (2.1)$$

the vectorial equation of motion is, for both stators and rotors,

$$\operatorname{grad} H^* = \mathbf{W} \times \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{F}. \quad (2.2)$$

However, for the motion through a stator field it is more convenient to write

$$\operatorname{grad} H = \mathbf{C} \times \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{F}. \quad (2.2a)$$

By dot multiplication in (2.2) and (2.2a) by \mathbf{W} and \mathbf{C} respectively, there results

$$\mathbf{W} \cdot \operatorname{grad} H^* = 0$$

and

$$\mathbf{C} \cdot \operatorname{grad} H = 0.$$

Consequently

$$H^* \equiv H^*(\psi) \quad (2.3)$$

and

$$H \equiv H(\psi). \quad (2.3a)$$

The converse is also true, and it may be proven by retracing the above steps, so that the following statement holds:

In the motion through a rotor, $H^ \equiv H^*(\psi)$, and in the motion through a stator, $H \equiv H(\psi)$ represent the necessary and sufficient conditions for the force field to be non-dissipative.*

2.2 The Force Field and the Vorticity Field

First the case of rotors will be considered and (2.2) will be written in scalar form.

$$0 = W_{\varphi} \bar{\zeta} + F_M, \quad (2.4)$$

$$0 = -C_M \bar{\zeta} + F_{\theta}, \quad (2.5)$$

$$\operatorname{grad}_{\psi} H^* = C_M \bar{\eta} - W_{\varphi} \bar{\xi} + F_{\psi}. \quad (2.6)$$

Then, take the tangent plane to a streamsurface at a point O . Evidently, this plane is determined by the tangent to the meridional streamline through O and the whirl direction, as it is shown in Figure 3 below.

The vorticity field and the force field may be decomposed into two parts, along \mathbf{u}_{ψ} and on the tangent plane,

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}_{\psi} + \boldsymbol{\Omega}_t, \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}_{\psi} + \mathbf{F}_t.$$

In natural coordinates,

$$\Omega_t: (\bar{\xi}, \bar{\eta}, 0), \quad \Omega_\psi: (0, 0, \bar{\zeta});$$

$$\mathbf{F}_t: (F_M, F_\theta, 0), \quad \mathbf{F}_\psi: (0, 0, F_\psi).$$

From (2.4) and (2.5), it follows immediately that if $F_\theta \neq 0$, then $\bar{\zeta} \neq 0$ and consequently $F_M \neq 0$, so that both components of F_t are different from zero if $\bar{\zeta}$ is different from zero. This relation will be termed 'physical equivalence' since the presence of one implies the other, and conversely. *It is clear that \mathbf{F}_t and Ω_ψ are physically equivalent. Ω_ψ will be termed the normal component of vorticity.* The relation between the other two vectors, \mathbf{F}_ψ and Ω_t , is not so

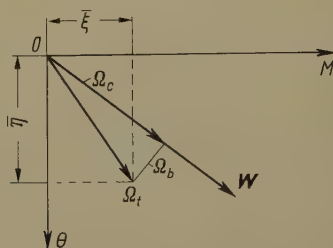


Figure 3

simple. In the tangent plane, Ω_t (Figure 3) may, in turn, be decomposed along and in the normal direction to the relative velocity,

$$\Omega_t = \Omega_c + \Omega_b$$

and since $\mathbf{W} \times \Omega_c = 0$, equation (2.6) may be rewritten,

$$\text{grad}_\psi H^* = W \Omega_b + F_\psi, \quad (2.6')$$

where Ω_b has a sign, positive or negative, depending on the sense of the trihedron $\mathbf{u}_\psi, \mathbf{u}_W, \mathbf{u}_c$ with respect to $\mathbf{u}_M, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_\psi$. The component Ω_c of the vorticity along the relative velocity does not enter into the equations of motion and will be termed *The Beltrami Component of Ω* . The component Ω_b will be called the *binormal component of Ω* . These directions are not parallel to the normal and binormal of the streamlines, except in exceptional cases.

In regard to Ω_b and F_ψ two cases are possible.

- (I) If $H^* \equiv 0$, *Lorenz flows*, then Ω_b and F_ψ are physically equivalent.
- (II) If $H_\psi^* \neq 0$, a *first binormal component of Ω* , Ω_{b_1} , is defined such that,

$$W \Omega_{b_1} = H_\psi^*$$

which is 'free' vorticity and requires the presence of no forces, and a *second binormal component* of $\mathbf{\Omega}$, $\mathbf{\Omega}_{b_2}$, such that

$$W \mathbf{\Omega}_{b_2} = -F_{\psi} \quad \text{with} \quad \mathbf{\Omega}_{b_1} + \mathbf{\Omega}_{b_2} = \mathbf{\Omega}_b,$$

physically equivalent to F_{ψ} .

This analysis may now be summarized, and free and bound vorticity properly defined:

If the flow is a Lorenz flow, $H^ \equiv 0$, the field of forces \mathbf{F} is physically equivalent to a system of bound vorticity along the normal and binormal directions. In this case, the free vorticity is the Beltrami component of $\mathbf{\Omega}$.*

If the flow is not a Lorenz flow, $H^ \neq 0$, the field of forces \mathbf{F} is physically equivalent to a system of bound vorticity made up of the normal and the second binormal components of $\mathbf{\Omega}$. The free vorticity is the sum of the Beltrami and the first binormal components of $\mathbf{\Omega}$.*

In both cases the free vorticity represents the initial values for HELMHOLTZ' equation

$$\frac{d}{dt} \mathbf{\Omega} = (\mathbf{\Omega} \nabla) \mathbf{C}$$

ruling the variation with time of $\mathbf{\Omega}$ outside the force field.

In a stator field the same analysis applies if the Beltrami component is defined as the component of $\mathbf{\Omega}$ along \mathbf{C} , H is substituted for H^* , and the so called binormal components are along the normal to \mathbf{C} , instead of \mathbf{W} , on the tangent plane.

3. Dynamic Classification of Turbo-Flows

3.1 Potential Force Fields

As in classical mechanics, turbo-flow fields may be classified as *potential* and *non-potential*. Taking the curl in both sides of equation (2.2) or (2.2a), there results

$$\text{curl}(\mathbf{C} \times \mathbf{\Omega}) + \text{curl} \mathbf{F} = 0 \quad (3.1)$$

in both cases. If \mathbf{F} is a potential field,

$$\text{curl}(\mathbf{C} \times \mathbf{\Omega}) = 0. \quad (3.2)$$

That (3.2) is the characteristic vectorial equation of potential force flows may be easily proven. The direct theorem, 'if a fluid mass moves steadily under the influence of a potential force field, then (3.2) holds', has been proven above.

The converse, 'if (3.2) holds and $\partial \mathbf{C} / \partial t = 0$, the fluid motion defined by the velocity \mathbf{C} takes place under the influence of a potential force field', will be proven immediately.

Taking the curl on both sides of the identity

$$\frac{d}{dt} \mathbf{C} = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{1}{2} C^2 \right) - \mathbf{C} \times \boldsymbol{\Omega}$$

it follows that

$$\text{curl} \left(\frac{d}{dt} \mathbf{C} \right) = 0,$$

i. e., the curl of the acceleration is zero. Hence, the resultant of the forces acting on the fluid is a potential force field. Since the pressure forces per unit mass are given by $-\text{grad} \int dp/\rho$, the remaining forces, i. e., the force field \mathbf{F} , must also be potential.

Consequently, from the three scalar equations corresponding to (3.1), which in cylindrical coordinates read

$$-\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{d}{dt} g \right) = \text{curl}_r \mathbf{F}, \quad (3.3)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\eta}{r} \right) = \frac{2}{r^4} g g_z + \frac{1}{r} \text{curl}_\theta \mathbf{F}, \quad (3.4)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{d}{dt} g \right) = \text{curl}_z \mathbf{F}, \quad (3.5)$$

the characteristic equations of potential-force fields are found to be

$$\frac{d}{dt} g = a, \quad (3.6)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\eta}{r} \right) = \frac{2}{r^4} g g_z, \quad (3.7)$$

where a is a spatial constant. Thus, (3.6) and (3.7) are the characteristic equations of potential force flows in kinematic terms.

For the axially symmetric case, from the condition $\text{curl} \mathbf{F} = 0$, the characteristic conditions in scalar terms will now be deduced.

From $\text{curl}_\theta \mathbf{F} = 0$ it follows that there must exist a function, $f(r, z)$, such that,

$$F_r = f_r \quad \text{and} \quad F_z = f_z.$$

From $\text{curl}_r \mathbf{F} = 0$ and $\text{curl}_z \mathbf{F} = 0$ it follows that

$$\frac{\partial}{\partial r} (r F_\theta) = 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial}{\partial z} (r F_\theta) = 0$$

so that

$$r F_\theta = k \quad (k = \text{const}).$$

Since, in cylindrical coordinates, $\text{grad}_\theta I' = I'_\theta/r$, there exists a family of surfaces of the form,

$$I' \equiv k [\theta - f(r, z)] \quad (3.8)$$

such that

$$\mathbf{F} = \text{grad } I'. \quad (3.9)$$

Inasmuch as $\theta = \varphi + \omega t$, for rotors I' will be taken in the form

$$I' \equiv k [\varphi - f(r, z)] \quad (3.10)$$

and (3.9) will be reserved for stators. The converse is also true, if the force field is given by (3.9) with I' as in (3.10), or as in (3.8), the force field is potential and axially symmetric, (3.10) and (3.9), or (3.9) and (3.8), are the characteristic conditions, in dynamic terms, for the flow to be a potential force flow. The k in (3.10) is the same constant as the a in (3.6).

3.2 Properties of Potential Force Flows

To investigate the different properties of potential force flows, the scalar equations corresponding to (2.2) will be written in cylindrical coordinates.

$$H_r^* = \frac{W_\varphi}{r} g_r - \eta C_z - a j_r, \quad (3.11)$$

$$0 = -\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dt} g + \frac{a}{r}, \quad (3.12)$$

$$H_z^* = \frac{W_\varphi}{r} g_z + \eta C_r - a j_z. \quad (3.13)$$

(3.12) simply says that

$$\frac{d}{dt} g = \text{const.}$$

Since for axially symmetric flows the value of $2\pi g$ at any point P of the field is the circulation about the circle through P normal to and with center at the axis, the difference in the time rate of circulation about any two such circles is zero. These circles are circuits of the second kind, i. e., not reducible to a point within the field. For a circuit of the first kind, reducible to a point within the field, KELVIN'S theorem holds in its standard form, i. e., the time rate of circulation about a circuit of the first kind is zero.

By use of these results, it is proven in standard text books that, if the force field is potential, the vortex lines move with the fluid.

It will be shown that to have the a of equation (3.12) equals a constant is a characteristic property of axially symmetric potential force flows. Other properties of this type of flow will now be investigated.

(A) *The Γ -Family of Curves*: The equation of motion (2.2), with \mathbf{F} from (3.9) and (3.10) reads

$$\text{grad } H^* = \mathbf{W} \times \boldsymbol{\Omega} + a \text{ grad } [\varphi - f(r, z)] . \quad (2.2')$$

$$\mathbf{W} \cdot \text{grad } H^* = \frac{d}{dt} H^* = 0 , \quad (2.3)$$

therefore, dot multiplication by \mathbf{W} in (2.2') yields

$$\frac{d}{dt} [\varphi - f(r, z)] = 0 ,$$

i. e., the surfaces $\varphi - f(r, z) = \text{const}$ contain the relative streamlines. The whirl components of the relative and the absolute velocity are, therefore, given by the following expressions,

$$W_\varphi = (f_r C_r + f_z C_z) r , \quad (3.14)$$

$$C_\theta = (f_r C_r + f_z C_z) r + \omega r . \quad (3.15)$$

Since, in potential force flows, the vortex lines move with the fluid, the Γ -surfaces will be made up of vortex lines if they contain one. From (2.2) it is clear that the surfaces

$$B \equiv H^* - \Gamma = \text{const} \quad (3.16)$$

contain both the vortex and the streamlines. However, only when $H_\psi^* = 0$ the surfaces Γ will also contain the vortex lines. Evidently, the condition

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \text{grad } \Gamma = 0$$

implies, from equation (2.2), that

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \text{grad } H^* = \boldsymbol{\Omega} \cdot a \text{ grad } [\varphi - f(r, z)] .$$

Since $a = \text{grad } \psi \cdot \boldsymbol{\Omega}$ and $\text{grad } H^* = H_\psi^* \cdot \text{grad } \psi$, it is clear that $\boldsymbol{\Omega} \cdot a \text{ grad } \Gamma$ can only be zero when $H_\psi^* \equiv 0$.

The structure of a potential force flow field may be described as follows:

(i) *If the flow is Lorenz, there exists a family of surfaces Γ made up of vortex and streamlines. Furthermore, these surfaces are the equipotential surfaces of the force field \mathbf{F} .*

(ii) *If the flow is not Lorenz, the family of equipotential surfaces of the force field \mathbf{F} is made up of streamlines. However, the family of surfaces made up of both the vortex and the streamlines is given by the family B of (3.16).*

For a stator field the same conclusions hold if in the above statements the absolute velocity is written instead of the relative, and the I' -family is given by (3.8) instead of (3.10).

(B) *Analytical Properties*: If in (3.7) the differentiation as to t is carried out, and use is made of (1.5) and (1.6), there results

$$\frac{1}{r^2} (\eta_r \psi_z - \eta_z \psi_r) - \frac{1}{r^3} \eta_l \psi_z = \frac{2}{r^4} g \bar{g}_z. \quad (3.17)$$

Changing independent variables from r, z , to r, ψ ,

$$\psi = \psi(r, z), \quad r = r \quad (3.18)$$

a transformation³⁾ with discriminant

$$\frac{D(\psi, r)}{D(r, z)} = -\psi_z$$

and, therefore, *valid for all non-cylindrical flows*, $C_r = \psi_z/r = 0$. Use of (3.16) on any function, say η , gives

$$\eta_r = \bar{\eta}_r + \bar{\eta}_{l\psi} \psi_r, \quad \eta_z = \bar{\eta}_\psi \psi_z$$

so that, in the new variables z and ψ , (3.17) becomes

$$\eta_{lr} - \frac{1}{r} \eta_l - \frac{2}{r^2} g \bar{g}_\psi = 0,$$

the general solution of which is given by

$$\bar{\eta}_l = r \left[K(\psi) - \frac{1}{r^2} \bar{g} \bar{g}_\psi + \int \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (\bar{g} \bar{g}_\psi) dr \right]. \quad (3.19)$$

If to (3.13) is applied the transformation (3.16) — i. e., using (1.5) and dividing by ψ_z — there results

$$H^* = \frac{1}{r^2} \bar{g} \bar{g}_\psi - \omega \bar{g}_\psi + \frac{\eta}{r} - a \bar{f}_\psi. \quad (3.20)$$

It is easy to show that (3.19) and (3.20) are identical if $K(\psi) = H_\psi^*$. To prove this, it is enough to show that

$$\int \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (\bar{g} \bar{g}_\psi) dr \equiv \omega \bar{g}_\psi + a \bar{f}_\psi. \quad (3.21)$$

³⁾ This is a variation of a transformation first used by von Mises in viscous flow problems. See *Bemerkungen zur Hydrodynamik*, Z. angew. Math. Mech. 7 (1927). This type of transformation will be used later on and plays an essential part in the reduction of the equation for the blade.

Taking derivatives with respect to r in both sides

$$\frac{1}{r^2} [\bar{g} \bar{g}_{r\psi} + \bar{g}_r \bar{g}_\psi] \equiv \omega \bar{g}_{r\psi} + a \bar{f}_{r\psi}. \quad (3.22)$$

Writing \bar{g} in terms of \bar{f}

$$\bar{g} = \bar{f}_r \bar{C}_r r^2 + \omega r^2$$

and taking derivatives with respect to ψ

$$\bar{g}_\psi = \bar{f}_{r\psi} \bar{C}_r r^2 + \bar{f}_r r^2 \frac{\partial \bar{C}_r}{\partial \psi}, \quad (3.23)$$

$\bar{f}_{r\psi}$ may be eliminated between (3.22) and (3.23). There results, taking into account that $a = \bar{g}_r \bar{C}_r$,

$$\bar{g}_r \bar{C}_r \left[\bar{g}_\psi - \bar{f}_r r^2 \frac{\partial \bar{C}_r}{\partial \psi} \right] = \bar{C}_r [\bar{g} \bar{g}_{r\psi} + \bar{g}_r \bar{g}_\psi] - [\bar{g} - \bar{f}_r \bar{C}_r r^2] \bar{C}_r \bar{g}_{r\psi}.$$

This equation may be reduced to

$$\bar{f}_r \frac{\partial}{\partial \psi} (\bar{C}_r \bar{g}_r) \equiv 0$$

which is an identity. Therefore, in an axially symmetric flow field with H^* — or H — a given function of ψ , the condition that the time rate of the angular momentum be everywhere constant is sufficient for the force field to be potential.

This characteristic property holds without any change for potential flows through a stator.

3.3 Non-Potential Force Flows

It was seen that if the flow is a potential force flow, there exist two one-parameter families of surfaces dynamically significant. The Γ -surfaces,

$$\Gamma \equiv a [\varphi - f(r, z)] = \text{const}$$

made up of streamlines, and to which the force field is normal; and the B -surfaces,

$$B \equiv [H^* - \Gamma] = \text{const}$$

made up of vortex and streamlines. If H_ψ^* is zero, i. e., if H^* is everywhere constant, then both families of surfaces coincide.

Consequently, in the general case, $H_\psi^* \neq 0$, for a potential force flow, one is at a loss as to what family of surfaces should be taken as the set of 'blades' in

the axially symmetric flow pattern. Since these two properties are not individually characteristic, potential force flows may be generalized in two directions.

(A) *von Mises Flows*: In 1909 — see reference [2] — VON MISES defined the 'blade' in the axially symmetric flow pattern by the condition that it should be made up of vortex and streamlines.

The conditions for a family of surfaces

$$B \equiv \varphi - f(r, z) = \text{const}$$

to exist and verify VON MISES' definition of 'blades' may be obtained — see reference [3] — from equation (2.2) as follows:

Dot multiplication by \mathbf{W} equals zero gives

$$\mathbf{W} \cdot \text{grad } B = -C_r f_r + \frac{W_\varphi}{r} - C_z f_z = 0$$

and dot multiplication by \mathbf{Q} equals zero gives

$$\mathbf{Q} \cdot \text{grad } B = \frac{1}{r} g_z f_r + \frac{\eta}{r} - \frac{1}{r} g_r f_z = 0,$$

two equations which may be solved for f_r and f_z . The condition

$$\frac{\partial}{\partial r} f_z - \frac{\partial}{\partial z} f_r = 0,$$

from which is derived the name of 'integrability condition', using (1.5) and (1.6), yields VON MISES' equation for rotors

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{(g - \omega r^2) g_r + r^2 \eta \psi_r}{r (g_r \psi_z - g_z \psi_r)} \right] = \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{(g - \omega r^2) g_z + r^2 \eta \psi_z}{r (g_r \psi_z - g_z \psi_r)} \right]. \quad (3.24)$$

VON MISES proved that the converse is true, if the angular momentum verifies (3.24) there exists a family of surfaces, $\varphi - f(r, z) = \text{const}$, containing both the vortex and the streamlines. Since (3.24) is an equation for the angular momentum g in terms of ψ and r there results an automatic ordering of the boundary conditions. These boundary conditions are well ordered in the sense that the meridional flow pattern, defined by equation (1.7), can be determined first.

The boundary conditions are:

- (i) Casing shape.
- (ii) Ring vorticity.
- (iii) Distribution of axial velocity at the entrance and the outlet to the rotor.
- (iv) The function $H^*(\psi)$ — or $H(\psi)$ — for stators.
- (v) An adequate distribution of g and its derivatives over one stream surface⁴).

⁴) Inasmuch as equation (3.24) is non-linear this problem is rather delicate and will not be discussed here. See VON MISES' original paper [2].

VON MISES' equation for the flow through stators can be obtained in the same manner, multiplying (2.2a) by \mathbf{C} and $\mathbf{\Omega}$. The final equation is

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{g}{r} (g_r \psi_z - g_z \psi_r) + r^2 \eta \psi_r \right] = \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{g}{r} (g_z \psi_r - g_r \psi_z) + r^2 \eta \psi_z \right], \quad (3.24a)$$

which may be obtained directly from (3.24) by setting $\omega = 0$.

It is simple to verify that if

$$\frac{d}{dt} g = \frac{1}{r} (g_r \psi_z - g_z \psi_r)$$

equals a constant, both (3.24) and (3.24a) become equation (3.7), i. e., *potential force flows are a subclass of von Mises flows*.

Using exactly the same reasoning as for potential force flows, it will be shown that the force field — which in VON MISES' theory is determined as a consequence of the knowledge of the flow pattern — can only be normal to the surface containing the vortex and the streamlines if H_ψ^* — or H_ψ — is zero.

(B) *Quasi-Potential Force Flows*: These flows will be defined by the condition that \mathbf{F} be of the following form,

$$\mathbf{F} = \alpha \text{grad} [\varphi - f(r, z)] \quad (3.25)$$

and represent, therefore, a generalization of potential force flows, whenever α is a function of r and z with α_r and α_z not simultaneously equal zero. The surfaces $\varphi - f(r, z) = \text{const}$ will represent the 'blades' for quasi-potential force flows.

Equation (2.2) with \mathbf{F} as in (3.25) shows that

$$\mathbf{W} \cdot \text{grad} [\varphi - f(r, z)] \equiv 0$$

and, therefore, the surfaces of the family $\varphi - f(r, z) = \text{const}$ contain the streamlines. It follows then that W_φ and C_θ are given by (3.14) and (3.15).

These 'blades' will contain the vortex lines only if $H_\psi^* \equiv 0$.

Furthermore, since

$$\text{grad} \{ \alpha [\varphi - f(r, z)] \} \neq \alpha \text{grad} [\varphi - f(r, z)] \quad (3.25a)$$

it is no longer possible to assume that there exists a family of surfaces containing both the vortex and the streamlines.

The study of these quasi-potential force flows, the main goal of this paper, will be made in the next part.

It should be noted that if $H_\psi^* \equiv 0$, the condition that \mathbf{F} be as in (3.25) is equivalent to VON MISES' equation. Evidently, for F_r and F_z to be of the form

$$F_r = -\alpha f_r, \quad F_z = -\alpha f_z$$

it is necessary — and sufficient — that

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{F_r}{\alpha} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{F_z}{\alpha} \right). \quad (3.26)$$

If in (3.26) α , F_r , F_z are substituted for their expressions in EULER's equations, (3.26) becomes VON MISES' equation.

Consequently, and this has some historical importance, the solution of the problem of quasi-potential force flows implies the solution of a very important class of von Mises flows.

It will be seen that the equations for the flow through stators are a special form — $\omega = 0$ — of those for rotors; the flow field has the same geometric structure as in the rotor field, depending now on the form of H_v instead of H_v^* .

4. Quasi-Potential Force Flows

It has been shown that the determination of an axially symmetric turbo-flow depends entirely, for non-potential force flows, on the definition of 'blade'. The adequacy of this model to represent actual turbo-flows is therefore dependent on that definition.

The 'blades' of a quasi-potential force flow, for rotor fields, are the surfaces of the family

$$\varphi - f(r, z) = \text{const} \quad (4.1)$$

containing the streamlines and such that the force field \mathbf{F} is given by

$$\mathbf{F} = \alpha(r, z) \text{grad} [\varphi - f(r, z)]. \quad (4.2)$$

EULER's equations are (3.11), (3.12), and (3.13) with α instead of a .

The hydrodynamic problem may now be stated:

'What are the set of equations and the corresponding boundary conditions which give a unique solution satisfying Euler's equations, and the equation of continuity,

$$\text{div } \mathbf{C} = 0.' \quad (4.3)$$

Furthermore, *'it will be required that the meridional flow pattern can be determined first'.*

With these requirements, (1.7) is the first equation to be solved and the corresponding, complete boundary conditions are:

$$(i), (ii) \text{ and } (iii)$$

of (3.3). The components of the velocity are given by (1.5) and (1.6), and the equation of continuity is automatically satisfied.

It will now be proven that 'if $H^* \equiv H^*(\psi)$ and two Euler equations are satisfied, the third equation holds also. Furthermore, if in these two equations, say the second and third, $F_r = -\alpha f_r$ and $F_\varphi = \alpha/r$, where both α and f are functions of r and z (f_r and f_z , and α_r and α_z not simultaneously zero), then there exists a family of curves such as (4.1) which contains the streamlines and \mathbf{F} is given by (4.2).'

If $H^* \equiv H^*(\psi)$, then $d/dt H^* = 0$, i. e.,

$$C_r \frac{dC_r}{dt} + C_\theta \frac{dC_\theta}{dt} + C_z \frac{dC_z}{dt} + \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dt} - \omega C_\theta C_r - \omega r \frac{dC_\theta}{dt} = 0.$$

Multiplying (3.12) and (3.13) by W_φ and c_z respectively, adding and subtracting the sum from the above equation, there results

$$C_r \left(\frac{dC_r}{dt} - \frac{C_\theta^2}{r} \right) = -\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial p}{\partial r} C_r - \left(\frac{\alpha}{r} W_\varphi - \alpha f_z C_z \right)$$

which is the first Euler equation with

$$F_r = -\alpha \frac{\frac{1}{r} W_\varphi - f_z C_z}{C_r}. \quad (4.4)$$

Since $H^* \equiv H^*(\psi)$ implies that

$$F_r C_r + F_\varphi W_\varphi + F_z C_z = 0 \quad (4.5)$$

and $W_\varphi = r d\varphi/dt$, using (4.4), (4.5) becomes

$$\alpha \left(\frac{d\varphi}{dt} - \frac{df}{dt} \right) = \alpha \left(f_r C_r + f_z C_z - \frac{d\varphi}{dt} \right) = 0$$

or

$$2\alpha \left(\frac{d\varphi}{dt} - \frac{df}{dt} \right) = 0$$

and, therefore, the family of curves

$$\varphi - f = \text{const}$$

contains the streamlines and F_r is given by $-\alpha f_r$, i. e., \mathbf{F} is given by (4.2). The statement is proven. This proof is independent of which two equations are selected.

Consequently, once the solution of (1.7) is known, a set of two Euler equations should be chosen and the boundary conditions for the set be defined so that the solution is unique and compatible with the meridional flow pattern already determined.

In what follows, the variables z and ψ will be used, i. e., the transformation

$$\psi = \psi(r, z), \quad z = z \quad (4.6)$$

will be performed on the chosen equations. This transformation is similar to (3.18) and valid wherever $\psi_r \neq 0$, i. e., for all flows which are not purely radial. In what follows, however, the bars will be omitted. Naturally, it must be understood that the same symbol, say C_z , does not indicate the same function in r and z as in z and ψ ; of course, both expressions for C_z become identical by use of (4.6). r will indicate the function of z and ψ , obtained by solving for r in the first equation of (4.6).

It will be shown in part 5 that, paradoxically as it may seem, z and ψ are the most adequate variables to express analytically the solution of (1.7) from numerical data.

Equations (3.11) and (3.12), in the variables z and ψ , read

$$H_\psi^* = \frac{W_\psi}{r} g_\psi + \frac{\eta}{r} - \alpha f_\psi, \quad (4.7)$$

$$\alpha = C_z \frac{\partial}{\partial z} (r^2 f_z C_z + r^2 \omega). \quad (4.8)$$

This is a system of two equations for the unknown functions α and f . Elimination of α between (4.7) and (4.8) gives the following equation for f :

$$\left. \begin{aligned} H_\psi^* - \frac{\eta}{r} &= C_z \left(f_z \frac{\partial}{\partial \psi} - f_\psi \frac{\partial}{\partial z} \right) [r^2 f_z C_z + r^2 \omega] \\ &= r^2 C_z^2 [f_z f_{z\psi} - f_\psi f_{zz}] + f_z C_z [f_z (r^2 C_z)_\psi - f_\psi (r^2 C_z)_z] \\ &\quad + \omega C_z [f_z (r^2)_\psi - f_\psi (r^2)_z]. \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

The above equation for f is a non-linear partial differential equation of second order, the coefficients of which are all known, either from the original data, as H^* and η , or from the solution of equation (1.7). The determination of α , to be made in equation (4.8), is done directly in terms of f and known quantities.

In physical terms, this may be interpreted as follows:

For a predetermined meridional flow pattern, the differential equation for the function f of (4.1), giving the blade shape, is obtained by elimination of the function α — load function — between the equations of motion along the ψ^5 and θ -directions. The working load⁶, given by the function α , corresponding to that blade is then given directly in the equation of motion along the θ -direction.

⁵) Equation (4.7) is the equation of motion along the ψ -direction, changed to the derivatives with respect to ψ from those with respect to s_ψ — by use of (1.9).

⁶) The term 'working load' applied to α is justified inasmuch as the change in angular momentum per unit mass is given in terms of α only, i. e., does not depend on F_r and F_z . See reference [4], Chapter I.

Consequently, the following statement is proven: *In the axially symmetric model of turbo-flows, with quasi-potential force fields, the meridional flow pattern is independent of the motion along the whirl direction. And, evidently, this is no longer true for potential force flows; for, the α in (4.8) will be a constant only 'accidentally'.*

The manner in which (4.7) and (4.8) are obtained is simple: (4.7) is obtained from (4.11) by division by ψ_r .

From (4.1) it follows that

$$\frac{d\varphi}{dt} = f_z C_z, \quad g = r^2 f_z C_z + r^2 \omega, \quad \frac{d}{dt} g = g_z C_z,$$

and substitution in (4.12) gives (4.8).

The remaining question is, then, what are the boundary conditions giving a unique solution for (4.9).

The differential equation of the characteristics of (4.9) is

$$f_z dz d\psi + f_\psi d\psi^2 = 0 \quad (4.10)$$

or

$$d\psi (f_z dz + f_\psi d\psi) = 0$$

and, therefore, the equation is of hyperbolic type and the characteristics are

$$\psi = \text{const}, \quad f = \text{const}. \quad (4.11)$$

Consequently, the reduction of (4.9) to normal form is accomplished by interchanging f, z, ψ , so that z be the dependent variable, i. e., (4.9) is, up to a factor, the differential equation in normal form defining the function

$$z = z(f, \psi). \quad (4.12)$$

Taking (4.12) as a transformation, the following formulae hold:

$$z_f = \frac{1}{f_z} (\psi = \text{const}), \quad z_\psi = -\frac{f_\psi}{f_z} (f = \text{const}). \quad (4.13)$$

From either one of (4.13)

$$z_{\psi f} = \frac{f_{zz} f_\psi - f_{z\psi} f_z}{f_z^3}. \quad (4.14)$$

Using (4.13) and (4.14), (4.9) becomes

$$\left. \begin{aligned} z_{f\psi} = & \left(\frac{\eta}{r} - H_\psi^* \right) r^{-2} C_z^{-2} z_f^3 + [(r^2 C_z)_\psi + (r^2 C_z)_z z_\psi] C_z^{-1} r^{-2} z_f \\ & + \omega [(r^2)_\psi + (r^2)_z z_\psi] C_z^{-1} r^{-2} z_f^2 \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

an equation which will be written symbolically,

$$z_{f\psi} = \Phi(z, \psi, z_f, z_\psi). \quad (4.15')$$

In this form — see reference [7] — a set of boundary conditions, complete from a mathematical standpoint and admissible from the point of view of applications, is the following:

$$\left. \begin{aligned} \text{(I)} \quad f &= h_1(\psi) \quad \text{at} \quad z = 0, \\ \text{(II)} \quad f &= h_2(z) \quad \text{at} \quad \psi = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

As shown in Figure 4, a cartesian representation of $z = z(f, \psi)$, the first condition above is the equation for the leading edge (assuming the entrance to the rotor field at $z = 0$). The second condition gives the blade form at one streamline.

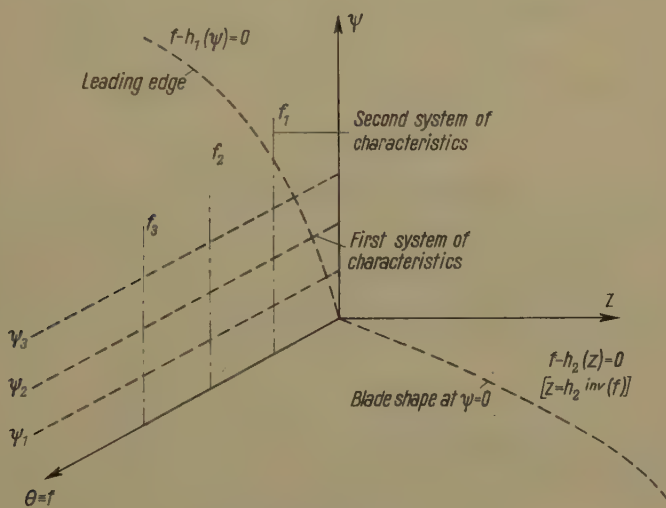


Figure 4

Cartesian representation of the characteristics and the boundary conditions.

In mathematical terms, these conditions give the value of z over one characteristic, $z = h_2^{\text{inv}}(f)$ at $\psi = 0$, and the value of z , $z = 0$, over a non-characteristic line, $f = h_1(\psi)$. PICARD proved that for these conditions the solution is unique and may be obtained by repeated iterations, if $\Phi(z, \psi, z_f, z_\psi)$ is adequately bounded. See again reference [7] for a precise definition of these terms.

From (4.15), taking into account (4.16), condition II, integration with respect to ψ gives⁷⁾

$$z_f = h_2^{inv'}(f) + \int_0^\psi \Phi [z(f, \psi_0), z_f(f, \psi_0), z_\psi(f, \psi_0), \psi_0] d\psi_0.$$

Integrating again with respect to f , and taking into account condition I,

$$z = \int_{h_1(\psi)}^f \left\{ h_2^{inv'}(f_0) + \int_0^\psi \Phi [z(f, \psi_0), z_f(f, \psi_0), z_\psi(f, \psi_0), \psi_0] d\psi_0 \right\} df_0. \quad (4.17)$$

Since

$$\int_{h_1(\psi)}^f h_2^{inv'}(f_0) df_0 = h_2^{inv}(f) - h_2^{inv}[h_1(\psi)].$$

Calling $h_2^{inv}(f) = A(f)$ and $h_2^{inv}[h_1(\psi)] = B(\psi)$, (4.17) may be rewritten

$$z = A(f) - B(\psi) + \int_{h_1(\psi)}^f \left\{ \int_0^\psi \Phi [z, z_f, z_\psi, \psi_0] d\psi_0 \right\} df_0, \quad (4.18)$$

where the first approximation, z_1 , is given by

$$z_1 = A(f) - B(\psi),$$

i. e., by the boundary conditions. Because this process is convergent, the non-linearity of the equation is no longer relevant. (If the iteration is carried out locally, the non-linearity of the equation restricts the validity of the process. This will be seen in part 5.)

For stators, the stream function is the same as for rotors. Equation (4.1) reads

$$\theta - f(r, z) = \text{const}.$$

(4.2) is the same — with α instead of a , of course. (3.11) reads

$$H_r = \frac{C_\theta}{r} g_r - \eta C_z - \alpha f_r. \quad (3.11a)$$

(3.12) is also the same. Applying the transformation (4.6) to (3.11a) and (3.12) there results the system

$$H_\psi = \frac{C_\theta}{r} g_\psi + \frac{\eta}{r} - \alpha f_\psi, \quad \alpha = C_z \frac{\partial}{\partial z} [r^2 f_z C_z],$$

⁷⁾ h_2^{inv} is the inverse function of h_2 , that giving z as a function of f . $h_2^{inv'}$ is simply the derivative of h_2^{inv} with respect to f .

The subscript θ indicating the variable of integration.

and the result of eliminating α is

$$H_\psi - \frac{\eta}{r} = C_\infty \left(f_z \frac{\partial}{\partial \psi} - f_\psi \frac{\partial}{\partial z} \right) [r^2 f_z C_z],$$

i. e., the equation for the stator blade is obtained from (4.9) by setting $\omega = 0$, and changing H^* to H .

In the form of an answer to the formulation of the problem given at the beginning of this part, a summary of these results is given below.

'The hydrodynamic problem for quasi-potential force flows is reduced to the solution of STOKES' equation for the stream function ψ , and the hyperbolic equation for the function f giving the blade shape that results from elimination of the load-function α between the equations of motion along the ψ and θ -directions.' The boundary conditions defining uniquely the flow are:

- (I) *The distribution of energy, $H^*(\psi) = \text{or } H(\psi)$.*
- (II) *η , the vorticity along the tangential direction.*
- (III) *The casing shape.*
- (IV) *The distribution of axial velocity at the entrance and outlet of the blade row.*
- (V) *The leading edge of the blade.*
- (VI) *The intersection of the blade and one stream surface.*

5. An Example

5.1 The Meridional Flow Pattern

Boundary conditions II, III, and IV determine uniquely the meridional flow [9].

In regard to III, the casing shape was selected with $R_0 = \text{const}$ and the inner radius from the general expression

$$\frac{r}{R_{i_1}} = 1 + \frac{\kappa - 1}{1 - 6\delta + 6\delta^2} [6\delta(3\delta - 2)z^2 + (4 - 12\delta^2)z^3 + (6\delta - 3)z^4] \quad (5.1)$$

giving a family of curves with zero tangent at R_{i_1} and R_{i_2} ; z varying from zero to one; and such that $z = 0$, $r = R_{i_1}$, and for $z = 1$, $r = R_{i_2}$; $\kappa = R_{i_2}/R_{i_1}$; δ is the z -coordinate of the inflection point.

Figure 6 is a casing for the following specifications:

$$\kappa = 2, \quad \delta = 0.5, \quad R_{i_1} = 2, \quad R_0 = 5.$$

The geometric configuration is determined by the ratio of any one radius to the axial length. This ratio was chosen,

$$\frac{R_{i_0}}{L} = \frac{3}{4}, \quad L = \frac{16}{3}.$$

That the concrete specification of this ratio is necessary is seen by inspection of equation (5.5).

η was selected from experimental work in the following manner. From HOWELL's measurements [8] of the axial velocity distribution through an axial compressor, taking differentials in

$$r = r_i + m \frac{h}{d}$$

$$\frac{\partial \left(\frac{C_z}{C a} \right)}{\partial \left(\frac{h}{d} \right)} \text{ is transformed into } \frac{\partial \left(\frac{C_z}{C a} \right)}{\partial r}.$$

By graphical differentiations, and assuming that HOWELL's five curves of Figure 5 correspond to $z = 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1$, there results a distribution of

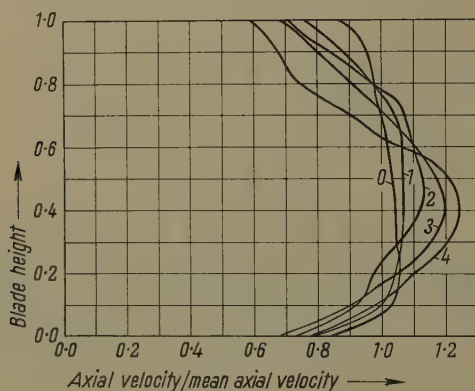


Figure 5

Distribution of axial velocity through a four-stage compressor (from HOWELL). Curve 0 after entry guide; 1 after first stage; 2 after second stage; 3 after third stage; 4 after fourth stage.

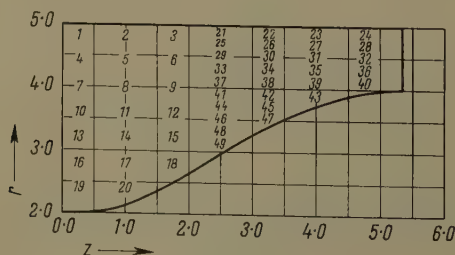


Figure 6

Case shape and net code arrangement.

meridional vorticity, η , throughout the casing as shown in Figure 9. This vorticity distribution was obtained under the assumption

$$\frac{\partial C_r}{\partial z} = 0. \quad (5.2)$$

Physically, η/r has more meaning than η , for it represents the strength of the vortex ring [11]. Consequently, three cases are possible:

Case I: $\eta = 0$.

Case II: $\eta/r = \text{function of } r \text{ and } z$.

Case III: $\eta/r = \text{function of } \psi$.

To obtain η/r as a function of ψ , curve 2 of Figure 5 was used under the assumption (5.2). This function is shown in Figure 7.

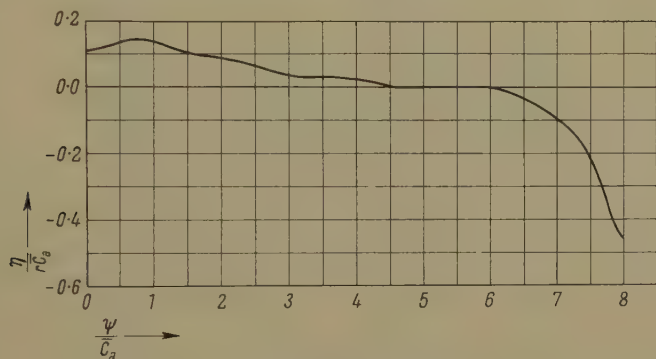


Figure 7

Vortex ring intensity corresponding to curve 2 of Figure 5.

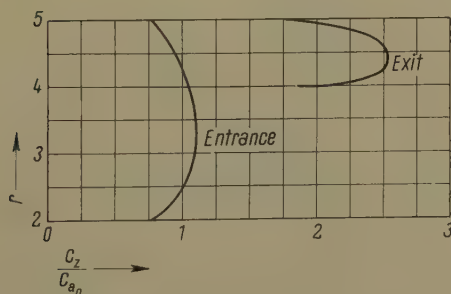


Figure 8

Entrance and exit-velocity distribution corresponding to the vorticity above.

Although (5.1) is given in dimensionless z , it is necessary to determine the ratio of one radius to the axial length, L . This chosen ratio, R_{i0}/L , was set equal to $4/3$, giving $L = 16/3$.

For $\eta = 0$, the axial velocity was assumed constant with r , at the entrance and the outlet.

For cases II and III, the axial velocity distributions at the entrance and the outlet are given in Figures 10 and 8, respectively.

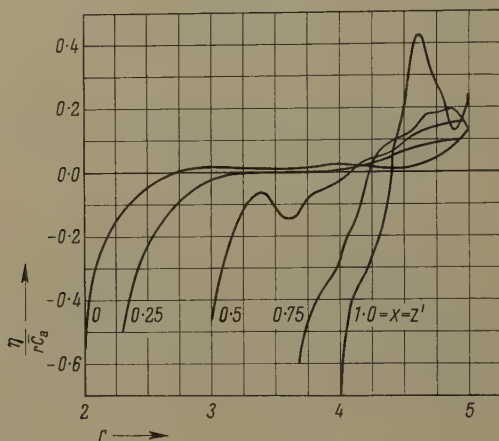


Figure 9
Vorticity distribution as derived from Figure 5.

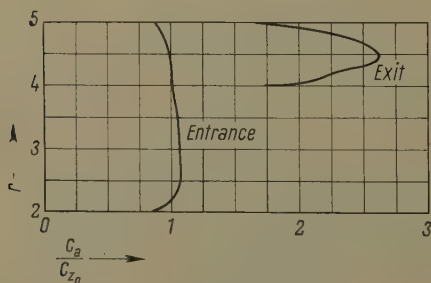


Figure 10
Entrance and exit-velocity distribution corresponding to the vorticity above.

For the net code arrangement shown in Figure 6, the numerical values of ψ are given in Table 1. These values are used as a means to obtain analytical expressions for the solutions.

Table 1

| Case I | | Case II | | Case III | |
|---------|----------------|---------|----------------|----------|----------------|
| Pt. No. | ψ -values | Pt. No. | ψ -values | Pt. No. | ψ -values |
| 1 | 0.0356 | 1 | 0.0318 | 1 | 0.0270 |
| 2 | 0.0381 | 2 | 0.0326 | 2 | 0.0292 |
| 3 | 0.0418 | 3 | 0.0346 | 3 | 0.0329 |
| 4 | 0.1023 | 4 | 0.0965 | 4 | 0.0892 |
| 5 | 0.1094 | 5 | 0.1017 | 5 | 0.0966 |
| 6 | 0.1199 | 6 | 0.1116 | 6 | 0.1081 |
| 7 | 0.1629 | 7 | 0.1576 | 7 | 0.1510 |
| 8 | 0.1736 | 8 | 0.1686 | 8 | 0.1624 |
| 9 | 0.1895 | 9 | 0.1856 | 9 | 0.1801 |
| 10 | 0.2173 | 10 | 0.2137 | 10 | 0.2098 |
| 11 | 0.2303 | 11 | 0.2282 | 11 | 0.2240 |
| 12 | 0.2499 | 12 | 0.2504 | 12 | 0.2455 |
| 13 | 0.2655 | 13 | 0.2637 | 13 | 0.2625 |
| 14 | 0.2793 | 14 | 0.2796 | 14 | 0.2780 |
| 15 | 0.2999 | 15 | 0.3037 | 15 | 0.3004 |
| 16 | 0.3073 | 16 | 0.3073 | 16 | 0.3087 |
| 17 | 0.3209 | 17 | 0.3226 | 17 | 0.3236 |
| 18 | 0.3477 | 18 | 0.3512 | 18 | 0.3505 |
| 19 | 0.3427 | 19 | 0.3442 | 19 | 0.3460 |
| 20 | 0.3570 | 20 | 0.3589 | 20 | 0.3595 |
| 21 | 0.0245 | 21 | 0.0190 | 21 | 0.0199 |
| 22 | 0.0284 | 22 | 0.0215 | 22 | 0.0237 |
| 23 | 0.0337 | 23 | 0.0248 | 23 | 0.0289 |
| 24 | 0.0388 | 24 | 0.0270 | 24 | 0.0336 |
| 25 | 0.0710 | 25 | 0.0600 | 25 | 0.0617 |
| 26 | 0.0833 | 26 | 0.0700 | 26 | 0.0747 |
| 27 | 0.0990 | 27 | 0.0817 | 27 | 0.0912 |
| 28 | 0.1142 | 28 | 0.0879 | 28 | 0.1067 |
| 29 | 0.1154 | 29 | 0.1048 | 29 | 0.1051 |
| 30 | 0.1358 | 30 | 0.1235 | 30 | 0.1266 |
| 31 | 0.1617 | 31 | 0.1473 | 31 | 0.1541 |
| 32 | 0.1868 | 32 | 0.1663 | 32 | 0.1808 |
| 33 | 0.1575 | 33 | 0.1498 | 33 | 0.1478 |
| 34 | 0.1856 | 34 | 0.1786 | 34 | 0.1780 |
| 35 | 0.2217 | 35 | 0.2176 | 35 | 0.2168 |
| 36 | 0.2572 | 36 | 0.2543 | 36 | 0.2546 |
| 37 | 0.1972 | 37 | 0.1933 | 37 | 0.1895 |
| 38 | 0.2326 | 38 | 0.2325 | 38 | 0.2278 |
| 39 | 0.2790 | 39 | 0.2858 | 39 | 0.2773 |
| 40 | 0.3257 | 40 | 0.3308 | 40 | 0.3268 |
| 41 | 0.2343 | 41 | 0.2342 | 41 | 0.2293 |
| 42 | 0.2766 | 42 | 0.2832 | 42 | 0.2748 |
| 43 | 0.3336 | 43 | 0.3409 | 43 | 0.3348 |
| 44 | 0.2687 | 44 | 0.2710 | 44 | 0.2665 |
| 45 | 0.3174 | 45 | 0.3252 | 45 | 0.3186 |
| 46 | 0.3003 | 46 | 0.3017 | 46 | 0.3009 |
| 47 | 0.3548 | 47 | 0.3585 | 47 | 0.3565 |
| 48 | 0.3290 | 48 | 0.3316 | 48 | 0.3315 |
| 49 | 0.3549 | 49 | 0.3571 | 49 | 0.3570 |

By cross-plotting the values of $\psi(r, z)$, a set of streamlines — or stream-surfaces — are obtained for all three cases, Figures 11, 12, and 14.

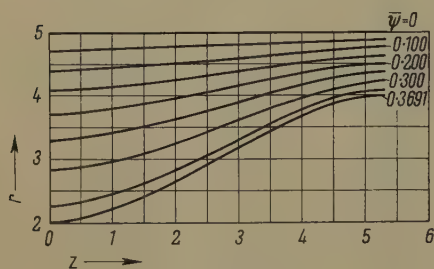


Figure 11

Irrotational meridional flow pattern (case I).

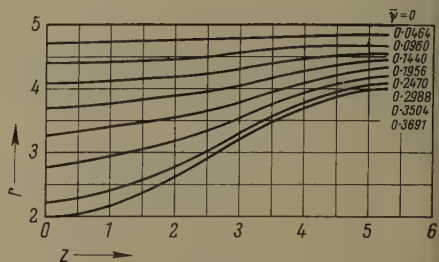


Figure 12

Rotational meridional flow pattern (case II).

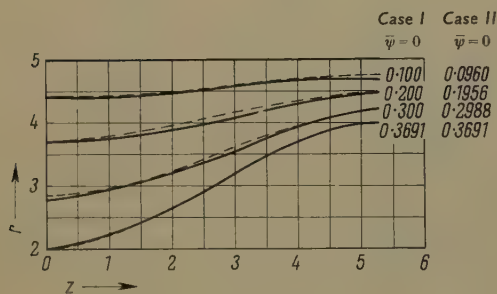


Figure 13

Comparison of meridional flow patterns (cases I and II). --- case I; — case II.

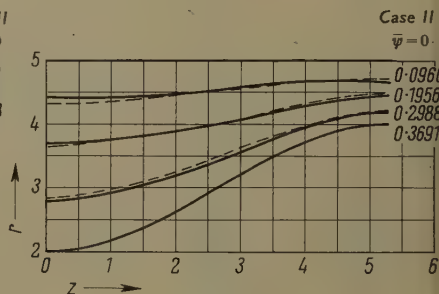


Figure 14

Comparison of meridional flow patterns (cases II and III). — case II; --- case III.

For the first two cases, along these streamlines r as a function of z is expressed in Fourier series. Then, the coefficients are functions of ψ , and are expressed as polynomials. These analytical expressions are given below.

Case I

$$\left. \begin{aligned} r = & (5.002 - 4.203 \bar{\psi} - 0.0125 \bar{\psi}^2 - 8.857 \bar{\psi}^3) \\ & + (0.004 - 1.879 \bar{\psi} + 2.121 \bar{\psi}^2 - 11.571 \bar{\psi}^3) \cos \frac{\pi z}{L} \\ & + (-0.136 \bar{\psi} + 0.494 \bar{\psi}^2 - 0.553 \bar{\psi}^3) \cos \frac{3\pi z}{L}. \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

Case II

$$\begin{aligned}
 r = & (5.0 - 5.148 \bar{\psi} + 4.011 \bar{\psi}^2 - 12.84 \bar{\psi}^3) \\
 & + (-1.365 \bar{\psi} - 0.5067 \bar{\psi}^2 - 8.484 \bar{\psi}^3) \cos \frac{\pi z}{L} \\
 & + (0.1740 \bar{\psi} - 3.414 \bar{\psi}^2 + 7.959 \bar{\psi}^3) \sin \frac{\pi z}{L} \\
 & + (0.3709 \bar{\psi} - 3.996 \bar{\psi}^2 + 8.096 \bar{\psi}^3) \cos \frac{3\pi z}{L} \\
 & + (-0.1363 \bar{\psi} + 3.170 \bar{\psi}^2 - 7.613 \bar{\psi}^3) \sin \frac{3\pi z}{L}.
 \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\bar{\psi} = \frac{\psi}{C_a L^2}, \quad L = 5 \frac{1}{3} \text{ units},$$

r, z real coordinates, C_a average axial velocity at the entrance.

In reality (5.3) and (5.4) are the solutions of the equation into which

$$\psi_{rr} - \frac{1}{r} \psi_r + \psi_{zz} = r \eta \quad (5.5)$$

transform when z and ψ are taken as independent variables, i. e., (5.3) and (5.4) are the solutions of

$$r r_{\psi\psi} + r_{\psi}^2 + r r_{zz} r_{\psi}^2 - 2 r r_{\psi} r_z r_{z\psi} + r r_z^2 r_{\psi\psi} + r^2 r_{\psi}^3 \eta = 0 \quad (5.6)$$

for the specific boundary conditions.

The advantages of such conversion of the numerical data to analytical form are manifold:

It avoids graphical differentiations which, if of second order, can be so inaccurate as to be almost meaningless.

It provides the solution in the needed form for the blade equation.

Finally, (5.6) may be interpreted — after division by $r^2 r_{\psi}^3$ — as an error function. This error function has dimensions of cycles per second per unit of average axial entrance velocity. It should be noted that, having only the numerical values, it would be impossible to estimate the error. A map of this error function is shown in Figure 19.

In Figure 13, the flow patterns for cases I and II, as obtained from (5.3) and (5.4), are compared. All the velocity distributions, Figures 15, 16, 17 and 18, are derived from (5.3) and (5.4).

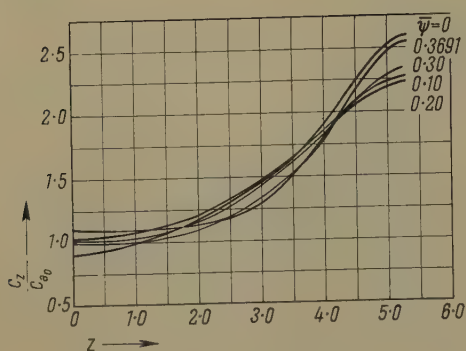


Figure 15

Axial velocity corresponding to flow pattern of Figure 11.

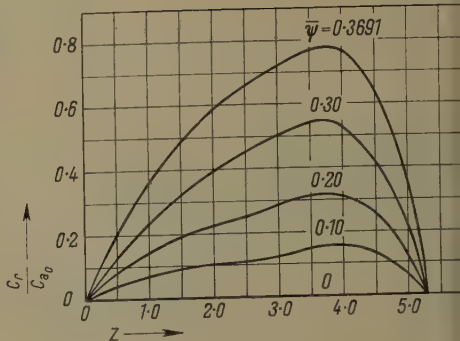


Figure 16

Radial velocity corresponding to flow pattern of Figure 11.

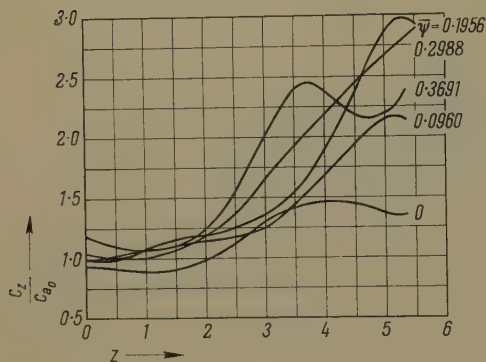


Figure 17

Axial velocity corresponding to flow pattern of Figure 12.

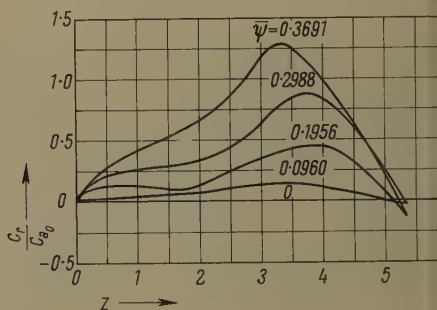


Figure 18

Radial velocity corresponding to flow pattern of Figure 12.

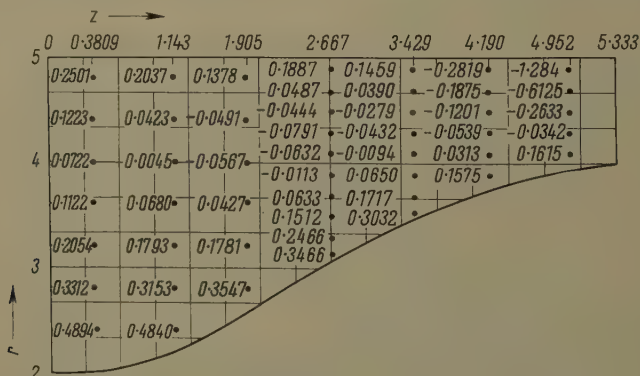


Figure 19

Map of error function with the same dimensions as $\eta/C a_0 L^2$.

5.2 The Blade Shape

To illustrate the method and to simplify computations, it is only necessary to consider a stationary 'blade'. The boundary conditions V and VI of part 4 are specified as follows:

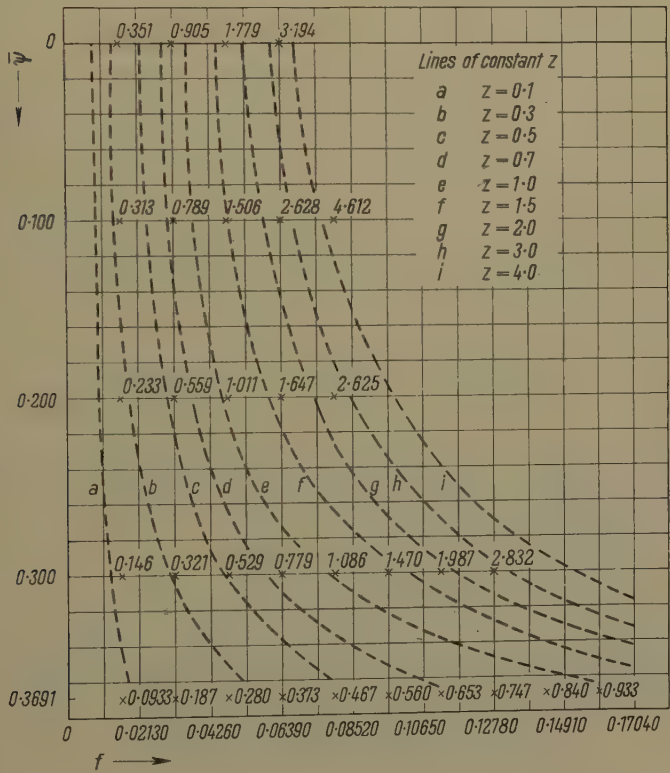
Over the hub, i. e., in the (f, z) -plane of Figure 4, the distribution of turning is given by

$$f = 0.1713 z^2 - 0.009532 z^3 . \tag{5.7}$$

The leading edge is taken along the ψ -axis at the entrance, which for case I coincides with the radial direction.

Table 2 gives the values of z over the (f, ψ) -plane as obtained directly, by iterative use of equation (4.18). This map shows why the blade, as given in the final drawing, Figure 23, does not go over the whole axial length of the hub.

Table 2
Values of z on the $(\bar{\psi}, f)$ -Plane as Computed Directly



From the numerical values obtained, the curves of f versus z for different ψ -values are given in Figure 20. To illustrate the results, a 'blade', assembled from these data, is shown in Figure 23.

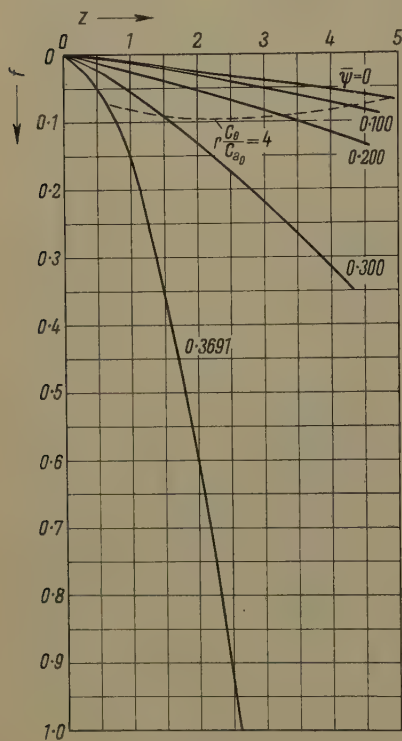


Figure 20
Angle variation through the blade.

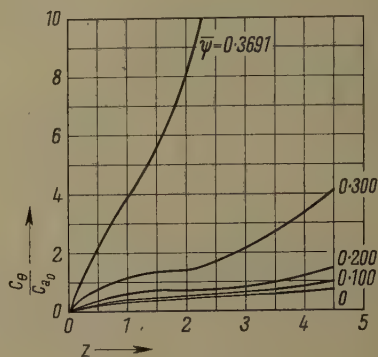


Figure 21
Angular velocity distribution.

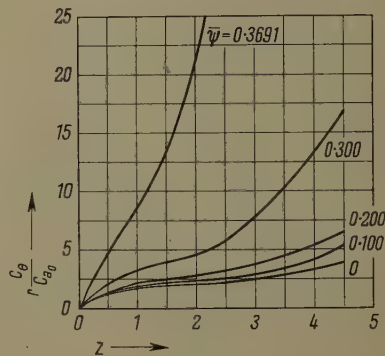


Figure 22
Angular momentum distribution.

Once the 'blade' is known, the distribution of C_θ and of the angular momentum, $C_\theta r$, can be calculated. This distribution is given in Figures 21 and 22, having been calculated as explained in part 4.

The flow pattern then is completely determined.

The pressure distribution depends, naturally, on the physical conditions at the entrance as described by $H(\psi)$, which in the example under consideration is assumed constant, i. e., $H_\psi(\psi) \equiv 0$. The actual values are to be obtained by substitution of C_r , C_θ , C_z in

$$\frac{1}{2} C^2 + \frac{p}{\rho} = \text{const.}$$

In Figure 23 the 'blade' is shown as assembled from all the computed data. The medium heavy lines are the lines of constant z and constant ψ making up the blade. The heaviest line is the vortex line corresponding to

$$r \frac{C_\theta}{C_a} = 4$$

drawn as if the computational errors, evident in Figure 20, were absent. The vorticity along this line is made up of free and bound vorticity. If the 'blade'

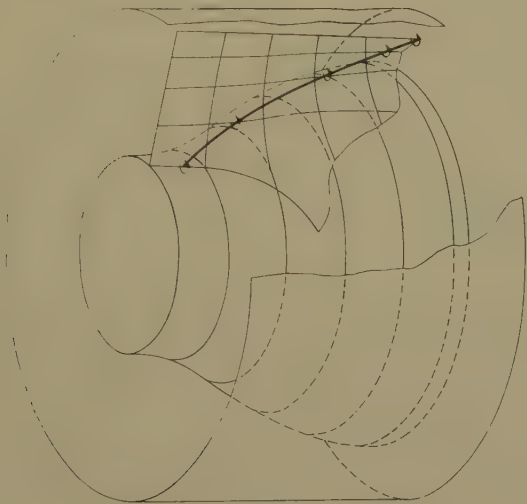


Figure 23
Trimetric projection of blade.

were to be cut along this line, the 'free vorticity' shed would be the Beltrami component, i. e., the projection of Ω on the streamlines.

Finally, these computational results show the inadequacy of choosing a radial entrance edge for the distribution (5.7). That is, the interrelationship of the different boundary conditions defining the flow through a turbo-machine is made evident.

Acknowledgments

The writer wants to acknowledge his gratitude to Mr. CHARLES CONCORDIA, of the Analytical Group of the General Electric Company in Schenectady, New York, and his assistants for their careful and ingenuous work in carrying out the numerical computations presented in this paper.

REFERENCES

- [1] H. LORENZ, *Technische Hydrodynamik* (München 1910).
- [2] R. VON MISES, *Theorie der Wasserräder*, Z. Mech. Phys. 57, No. 1, 2 (1909).
- [3] R. MEYER, *Beitrag zur Theorie feststehender Schaufelgitter* (Zürich 1946).
- [4] F. E. MARBLE, *The Flow of a Perfect Fluid Through an Axial-Flow Turbo-machine with Prescribed Blade Loading*, J. aeron. Sci. 15, 473-485 (1948).
- [5] F. G. GRAVALOS, *A Laminar Theory of the Flow Through a Turbo-Machine* ([Engineering and Science Series, No. 62], Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, N. Y., 1950).
- [6] A. GOLDSTEIN, *Axi-Symmetric Supersonic Flow in Rotating Impellers*, N. A. C. A., T. N. 2388 (1951).
- [7] G. M. MONROE, Doctor's Thesis (California Institute of Technology, Pasadena, California 1953).
- [8] A. R. HOWELL, The Institution of Mechanical Engineers. Proceedings 153, 441-452 (London 1945).
- [9] E. GOURSAT, *Cours d'analyse mathématique*, vol. III, chapter 27 and 28 (Paris 1927).
- [10] E. PICARD, *Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles*, chapter 15 and following (Paris 1927).
- [11] H. LAMB, *Hydrodynamics*, chapter 7, especially sections 161 to 166, 4th ed. (Cambridge 1916).

Zusammenfassung

Ausgehend von der Tatsache, dass eine Schaufelreihe äquivalent ist einem Kraft- und damit auch einem Wirbelfeld, wird der Begriff der Potential-Kraft-Strömung erweitert. Diese schliesst den «von Mises-Fall» ein, wenn das Euler-Integral im ganzen Feld konstant ist.

Die Struktur des Wirbelfeldes, sowohl des freien als auch des gebundenen, wird analysiert. Das Problem der Turbinenströmung reduziert sich auf die Lösung von zwei partiellen Differentialgleichungen, für die ein vollständiger Satz von Randbedingungen gegeben ist; die Rechnung wird auf bekannte numerische Methoden zurückgeführt.

Während die üblichen Rechnungsmethoden nur Eintritts- und Austrittsdiagramme liefern, erhalten wir hier die vollständige Geschwindigkeitsverteilung im ganzen Kraftfeld. Die Schaufelform wird angegeben, und es ist möglich, das Zusammenwirken verschiedener Entwurfsparameter zu untersuchen.

(Received: September 20, 1958.)

Der Hagelversuchskanal

Von ROLAND LIST, Weissfluhjoch-Davos¹⁾

1. Einleitung

Das Problem jeder Hageltheorie besteht darin, sämtliche bekannten Phänomene der Hagelbildung in ein mehr oder weniger geschlossenes System zusammenzufassen und zu erklären. Als Musterbeispiel sei hiefür die noch heute gültige Theorie erwähnt, die TRABERT 1899 aufstellte [1]²⁾. Die darin gemachten prinzipiellen Angaben genügten den Bedürfnissen bald nicht mehr, wollte man doch verschiedene Einzelprobleme mathematisch darstellen. Mit der Entwicklung der Aerodynamik und der Thermodynamik wurden daher grössere Studien über Wärmeübergänge und Strömungsverhältnisse [2, 3] angepackt. FOSTER und BATES [4], MASON [5] und LUDLAM [6] – um nur einige zu nennen – übernahmen die zum Teil weitgehend idealisierten Grundlagen und bauten die Theorien weiter aus. – Im Schosse der Eidgenössischen Kommission zum Studium der Hagelbildung und der Hagelabwehr reifte indessen der Entschluss, das physikalische Grundproblem unabhängig von den bestehenden, mehr theoretischen Arbeiten von der experimentellen Seite her anzupacken. Man hoffte, durch geeignete Messungen bessern Einblick in die Vorgänge des Wachstums der Eiskbildungskerne zu Hagelkörnern zu erhalten. Als Hauptzweck ist dabei die Abklärung der Bedingungen in einer Gewitterwolke zu nennen, die zu schwerem Hagel führen. Diese Problemstellung ist, abgesehen vom reinen Forschungsinteresse, speziell für die Hagelabwehr von Bedeutung, soll doch damit abgeklärt werden, wo am ehesten Ansatzpunkte für eine Hagelbekämpfung zu finden sind.

Als Untersuchungsmethode fällt die direkte aviatische Messung an Ort und Stelle der Hagelbildung infolge der ausserordentlichen Gefährlichkeit solcher Flüge sowie der ungenügend entwickelten Messmethodik dahin. Es soll daher versucht werden, auf Grund von Untersuchungen an natürlichen Hagelkörnern Rückschlüsse auf die ursprüngliche Gewitterwolke zu erhalten. Studien an atmosphärischen Eispartikeln [7–9] zeigen die ausserordentliche Vielfalt der Hagelkornstrukturen. Diese stellen prinzipiell das Produkt ihrer Entstehungsgeschichte dar. Eine Interpretation derselben ist jedoch höchstens in qualitativer Richtung möglich; sichere und genaue Angaben sind nur über verglei-

¹⁾ Forschungsstelle der Eidgenössischen Kommission zum Studium der Hagelbildung und der Hagelabwehr am Eidgenössischen Institut für Schnee- und Lawinenforschung.

²⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 413.

chende Experimente zu erwarten. Zur Erklärung des Aufbaues natürlicher Hagelkörner sollen daher bei messbaren, den atmosphärischen Verhältnissen analogen Bedingungen künstliche Eiskörner erzeugt werden. Die Apparatur, die diese Nachbildung gestattet, ist der *Hagelversuchskanal*, ein im Messteil vertikaler, künstlich klimatisierbarer Windkanal mit geschlossenem Kreislauf.

2. Bedingungen zur Schaffung einer «atmosphärischen» Umgebung für ein Test-Eiskorn

2.1 Zur Berechtigung der Betrachtung eines einzelnen Eiskornes

Die Möglichkeiten zur Nachbildung der Atmosphäre im Laboratorium sind in erster Linie raummässig beschränkt; sobald aber nur ein Hagelkorn als für sich isoliert betrachtet werden kann, eröffnen sich Wege zur Verwirklichung der Nachbildung im Experiment. Diese Annahme scheint genügend gerechtfertigt zu sein, wenn man die nach schweren Hagelfällen meist geringe Bedekung des Bodens mit Eisschlossen in Betracht zieht. In die gleiche Richtung weisen auch die vielfach zu beobachtenden, erstaunlichen Symmetrien der Hagelkörner [9].

2.2 Wahl der Experimentparameter

Das Wachstum eines Hagelkornes wird bestimmt durch seine Umgebung. Diese lässt sich charakterisieren durch Lufttemperatur, Luftfeuchte, Luftdruck, den freien Wassergehalt in Form von Tropfen oder Eisteilchen, deren Grössenverteilung und Temperatur sowie das Eisbildungs- und Kondensations-Kernspektrum. Unter Vernachlässigung allfälliger Beschleunigungen kann weiter eine Relativ-Geschwindigkeit zwischen Korn und Umgebung von der Grösse der freien Fallgeschwindigkeit der Eispartikel angenommen werden. Die Umgebungsverhältnisse können sich dadurch zeitlich rasch ändern; mit Gleichgewichten von Temperatur und Wasserdampfdruck zwischen Korn und Umgebung ist nur in wenigen Fällen zu rechnen.

Von verschiedenen Autoren wurde vermutet, dass auch elektrische Effekte das Wachstum von Hagelkörnern wesentlich beeinflussen. Da aber die Hagelbildung nicht unbedingt an Gewitter mit Blitz und Donner gebunden ist (siehe Hagelschlag vom 29. Juli 1958 in Luzern mit Hagelkörnern von über 10 cm Durchmesser), soll diese Möglichkeit als sekundär aufgefasst und vorläufig nicht als Parameter vorgesehen werden.

2.3 Dimensionierung der Experimentparameter

Die Dimensionierung der Experimentparameter soll so geschehen, dass die Versuche im Laboratorium auch bei noch extremeren Bedingungen durchgeführt werden können, als sie in der Natur zu erwarten sind. Da die Wolken-

gipfelhöhe selten über 10000 m über Meer liegt, ergeben sich folgende Parameterbereiche:

Der *Druck* variere zwischen 760 und 200 mm Hg.

Die *Temperatur* liege zwischen $+25^{\circ}$ und -40°C .

Der maximale freie *Wassergehalt* betrage 10 g/m^3 .

Die *Tropfengrösse* bewege sich von $1\text{ }\mu$ bis $200\text{ }\mu$.

Unter der Beschränkung, im Experiment an einem zur Beobachtung günstigen Ort Eisteilchen von maximal 2,5 cm Durchmesser zu untersuchen, dürfte eine *Luftgeschwindigkeit* von maximal 25 m/s angemessen sein.

Ein Ausschweben der Testobjekte wäre erwünscht, wird aber nicht zur Bedingung gemacht, zeigten doch die Versuche am Aerodynamischen Institut der ETH die ganze Schwere dieses Unterfangens [10]. BLANCHARD, der schon früher Schweberversuche mit Wassertropfen im offenen Windkanal machte [11], gelangte infolge der Selbststabilisierung durch Anpassung der Tropfenform und allfällige innere Ausgleichsströmungen des Wassers leichter zum Erfolg, als es für feste Körper zu erwarten ist.

Auf die Festlegung der restlichen Grössen sei zum vornherein verzichtet, da nur das Experiment die im Laboratorium mit vernünftigen Mitteln erreichbaren Eisbildungskern-Charakteristiken und Unterkühlungs- sowie Übersättigungsgrade aufzeigen kann. Gewisse Vorversuche zeigten aber bereits, dass Wassertropfen in Form von Nebel vorläufig bis -17°C unterkühlt werden konnten [12], und dass eine Variation der Gefrierkernkonzentrationen innerhalb weitester Grenzen möglich ist [13]. Unter diesen Voraussetzungen ist zu hoffen, dass auch hier atmosphärische Bedingungen angenähert werden können. Die Gewissheit hierzu wird jedoch erst durch einen Vergleich zwischen künstlich erzeugten und natürlichen Eispartikeln erbracht werden können.

2.4 Der Verzicht auf die Druckvariation im Experiment

An und für sich wäre es vorteilhafter, die Druckvariation im Experiment zu verwirklichen. Infolge des damit verbundenen, unverhältnismässig grossen finanziellen Aufwandes wird aber darauf verzichtet und versucht, die Verhältnisse für alle möglichen Drucke mit Hilfe von Ähnlichkeitsgesetzen auf Grund des Laborluftdruckes (entsprechend 2665 m über Meer) zu berechnen.

Wie aus der Strömungslehre bekannt ist, besteht die Möglichkeit, aus Messungen an einem Versuchsobjekt auf die Verhältnisse an einem andern geometrisch ähnlichen Körper zu schliessen – die Bedingung ist nur, dass die Reynolds-Zahl Re in beiden Fällen dieselbe ist.

Solche Ähnlichkeitsgesetze bestehen ebenfalls für Wärme- und Stoffübergänge – Vorgänge, die das Wachstum von Hagelkörnern wesentlich mitbeeinflussen – und werden durch die Nusselt-Zahl Nu , beziehungsweise durch die Analog-Nusselt-Zahl Nu' charakterisiert.

Die Druckabhängigkeit dieser Kennzahlen kann nach den zusammenfassenden Arbeiten von RANZ und MARSHALL [14, 15] für glatte Kugeln wie folgt implizit dargestellt werden:

$$Nu = 2,0 + 0,60 Pr^{1/3} Re^{1/2}, \quad (1)$$

$$Nu' = 2,0 + 0,60 Sc^{1/3} Re^{1/2}. \quad (2)$$

Dabei sind:

$Nu = \alpha d/\lambda$, Nusselt-Zahl;

$Pr = \nu/a$, Prandtl-Zahl;

$Re = v d/\nu$, Reynolds-Zahl;

$Nu' = \frac{k_m \bar{M} d \bar{p}}{k \varrho_L}$, Nusselt-Zahl zweiter Art oder Analog-Nusseltzahl; oder

$Nu' = \beta d/k$;

$Sc = \nu/k$, Schmidt-Zahl;

α Wärmeübergangszahl [$\text{kcal/m}^2 \text{ h } ^\circ$];

d Länge [m];

λ Wärmeleitzahl von Luft [$\text{kcal/m h } ^\circ$];

ν kinematische Zähigkeit [m^2/h];

a Temperaturleitzahl [m^2/h];

v Luftgeschwindigkeit [m/h];

k_m Massenübergangszahl [$\text{kg/m}^2 \text{ h } \Delta p M$];

Δp Partialdruckdifferenz des Wasserdampfes längs dem Transferweg [mm Hg];

M Molekulargewicht des übergehenden Stoffes;

\bar{M} mittleres Molekulargewicht des Gasgemisches im Transferweg;

\bar{p} Mittelwert aus der Differenz Totaldruck minus Partialdruck des diffundierenden Dampfes im Transferweg [mm Hg];

k Diffusionszahl von Wasserdampf in Luft [m^2/h];

ϱ_L Dichte des Luft-Gas-Gemisches im Transferweg [kg/m^3];

β Stoffübergangszahl [m/h oder $\text{kg/m}^2 \text{ h } \Delta C$];

ΔC Konzentrationsänderung [kg/m^3].

Wenn wir aerodynamische Versuche machen mit einem Testobjekt, das einen Durchmesser d_0 aufweise, so können wir Schlüsse ziehen auf ein geometrisch ähnliches bei anderem Druck. Soll die Reynolds-Zahl gleich bleiben, so wird dadurch der Durchmesser d_1 des letzteren bestimmt. Da für die gewünschte physikalische Ähnlichkeit der Wärme- und Stoffübergänge die Kennzahlen Nu und Nu' konstant bleiben müssen, hat dies zur Folge, dass im einen Fall die Prandtl-Zahl Pr , im andern die Schmidt-Zahl Sc durch eine Druckvariation gemäss Abschnitt 2.3 nicht beeinflusst werden dürfen. – Die Berechnung

dieses Einflusses auf die Kennzahlen Pr und Sc ergibt Schwankungen, die kleiner als 1% sind. Das heisst, dass unsere Forderung praktisch erfüllt ist – die Berechtigung für Extrapolationen von Experimenten aus dem Labor in die natürliche Atmosphäre ist damit für glatte Kugeln gegeben. Es sei hier noch speziell vermerkt, dass es sich hierbei nur um Luft-Luft-Transformationen handelt! Aus Form-Betrachtungen (siehe zum Beispiel [9, 16]) wissen wir aber, dass Hagelkörner höchst selten durch glatte Kugeln zu charakterisieren sind; wir müssen also auf die allgemeinen Gleichungen für beliebige Körper zurückgreifen. Diese lauten wie folgt:

$$Nu = f(Pr, Re), \quad (3)$$

$$Nu' = f'(Sc, Re). \quad (4)$$

Oben erwähnte Überlegungen sind damit ebenso gültig für den allgemeinen Fall; die Nusselt-Zahl Nu und die Analog-Nusselt-Zahl Nu' bleiben gleich bei gleichem Re und Druckvariationen in dem von uns geforderten Bereich.

Die physikalische Ähnlichkeit gilt damit auch für den allgemeinen Körper.

Neben den Problemen der Strömung, des Wärme- und des Stoffaustausches, die durch die Kennzahlen Re , Nu und Nu' charakterisiert werden, spielt auch das Einfangen freien Wassers durch das Hagel- oder Testkorn eine Rolle bei der Betrachtung des Wachstums einer Eispartikel. Wie weit diese Einfangwahrscheinlichkeit druckabhängig ist, kann nicht entschieden werden, es besteht jedoch die Hoffnung, dass sie bei gleicher Reynolds-Zahl ebenfalls gleich bleibt.

3. Standort des Hagelversuchskanals

Im Programm der Eidgenössischen Kommission zum Studium der Hagelbildung und der Hagelabwehr war von allem Anfang an die Forschungsstelle am Eidgenössischen Institut für Schnee- und Lawinenforschung zur Bearbeitung der Probleme über die künstliche Erzeugung hagelbildender Verhältnisse vorgesehen. Eine längere Tradition dieses Institutes in den Untersuchungen an festen Niederschlagspartikeln sowie grössere praktische Erfahrungen über atmosphärische Vereisungen in der Natur und im Windkanal waren die Gründe hierzu.

Durch eine wesentliche Vergrösserung des Institutes auf Weissfluhjoch wurde der Laboratoriumsraum zur Aufnahme der geplanten Anlage geschaffen; Kälteräume zur Eisuntersuchung standen bereits mehrere zur Verfügung.

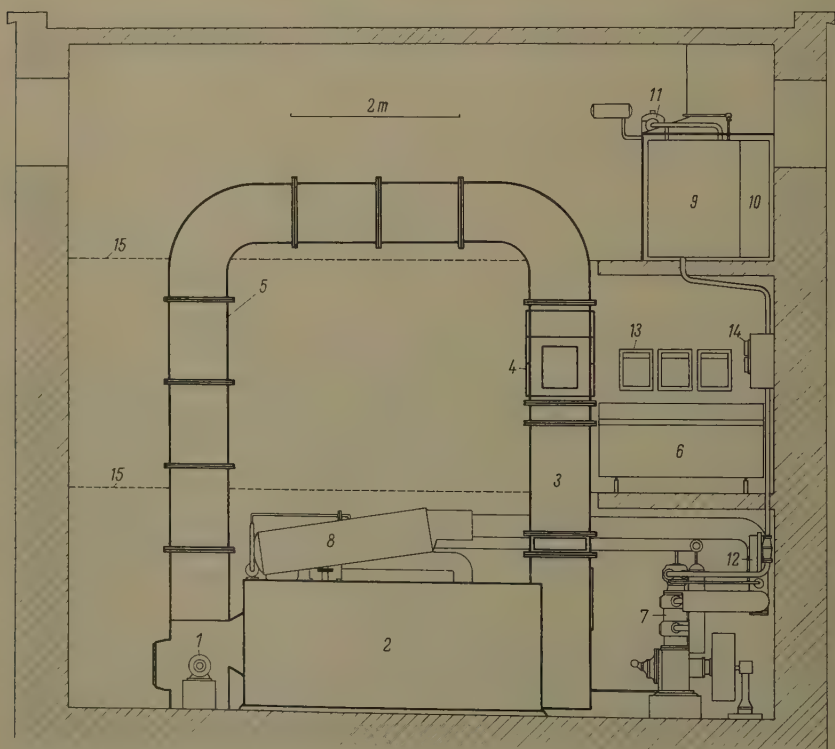
Die Wahl des Standortes ist auch günstig, da zufolge der Höhe dieser Forschungsstation (2665 m über Meer) mindestens zehnmal pro Jahr Graupelfälle zu beobachten sind. Die Untersuchung der Reif- und Frostgraupeln – Ursprungspartikeln der meisten Hagelkörner – brachte im Laufe der vergangenen Jahre eine wesentliche Klärung dieser speziellen Entwicklungsstufen des häu-

figsten Hagelkornwachstums. Die Ansetzung des Versuchsprogrammes mit dem Hagelkanal wurde damit wesentlich erleichtert.

4. Aufbau und Wirkungsweise des Hagelversuchskanals

4.1 Übersichtsschema

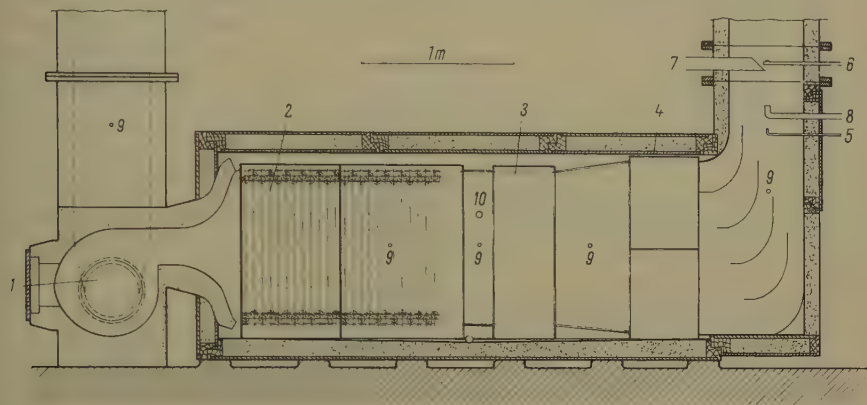
Die Hauptcharakteristik des Hagelversuchskanals ist der Darstellung in Figur 1 zu entnehmen: Ein Ventilator 1 treibt die Luft durch den Temperierungs- und Filterteil 2 in ein Winkelstück, dem die 2 m lange Befeuchtungs- und Ausgleichsstrecke 3 folgt. Dieser angebaut ist die eigentliche Meßstelle 4, in der die einzelnen Experimente stattfinden. Der Luftstrom gelangt hernach durch einen Diffusor in die eigentliche Rückführung 5 und zurück zum Venti-



Figur 1

Der Hagelversuchskanal (1:90). 1 Ventilator; 2 Temperierungs- und Filterteil; 3 Befeuchtungs- und Ausgleichsstrecke; 4 Meßstelle; 5 Rückführung; 6 Steuerpult; 7 Kältekompressor; 8 Flüssigkeitsabscheider; 9 Ammoniakkondensor; 10 Kompressorkühler; 11 Ölabscheider; 12 Motorventil; 13 Kompensationsschreiber; 14 Temperaturregelanlage; 15 Rostböden.

lator, womit der Kreislauf geschlossen ist. Die gewünschten Feuchtebedingungen werden durch Einspritzen von Dampf oder Wasser im Anfang der Ausgleichsstrecke 3 erzeugt; am gleichen Ort geschieht auch die Zugabe der Eiskbildungskerne, die die Vereisungs-Charakteristik der an die Versuchsobjekte angeströmten Feuchte bestimmen. Die Steuerung der Anlage erfolgt von einem Pult 6 aus, wo auch sämtliche wichtigen Grössen angezeigt und registriert werden. 7 stellt den Kältekompressor dar, 8 bis 12 dessen Zubehöerteile.



Figur 2

Der Temperierungs- und Filterteil einschliesslich Befeuchtungsstrecke (1:50). 1 Gebläse; 2 Ammoniakverdampfer; 3 Heizelement; 4 elektrostatisches Luftfilter; 5 Eiskbildungskerne-einführung; 6 Wassereinführung; 7 Wassereinführung; 8 Dampfeinführung; 9 Temperaturkontrollmessstellen; 10 Temperaturfühler für Kompressorsteuerung.

Figur 2 zeigt den Temperierungs- und Filterteil einschliesslich der Befeuchtungsstrecke etwas ausführlicher. 1 bedeutet hier das Gebläse, 2 den Ammoniak-Verdampfer oder Luftkühler, 3 ein Heizelement und 4 das elektrostatische Luftfilter. Durch die Leitung 5 werden die Eiskbildungskerne eingespritzt, währenddem 6 und 7 für Wasser-, 8 für Dampfeinführung bestimmt sind. Die mit 9 bezeichneten Punkte bedeuten Temperaturkontrollmeßstellen, währenddem am Orte 10 ein Temperaturfühler für ein Regelgerät liegt. Es sei noch vermerkt, daß Anlage und Labor nach dem Baukastenprinzip errichtet sind und leicht demontiert oder umgebaut werden können.

4.2 Zur Konstruktion des Windkanals

Die Bedingungen an den Kanalquerschnitt wurden gegeben durch die Forderung eines Meßstellenquerschnittes von 25×25 cm; dies führte zu einer lichten Weite von 50×50 cm, die nur im Temperierungsteil verdoppelt wurde, um durch Vergrößerung der Luftkühler-Übergangsflächen sowie der Verweilzeiten

bessere Wärme- bzw. Kälteauschswerte zu erreichen. Die Höhe des Kanalsystems wurde bedingt durch die notwendige Länge der Ausgleichsstrecke, soll doch das darin eingespritzte Wasser bis zur Meßstelle die Temperatur der umgebenden Luft praktisch angenommen haben.

Von der Kanalwandung wurde gefordert: gute Isolation, geringe Wärmekapazität sowie durchgehend praktisch gleicher Ausdehnungskoeffizient. Die erste Bedingung resultierte aus dem Wunsch, auch bei tiefsten Betriebstemperaturen von -60°C nur geringe Wärmeverluste decken zu müssen, die zweite aus dem Bedürfnis, rasche Temperaturänderungen vornehmen zu können, währenddem die dritte allzu grosse Spannung innerhalb der Kanalwand ausschliessen soll. Nach verschiedenen Material- und Bauversuchen wurde auf 10 cm dicke Zublanit-Kunststoffplatten gegriffen. Sie bewährten sich in der Folge ausgezeichnet. Die mechanischen Eigenschaften liessen es zudem zu, die Platten zu einer selbsttragenden Konstruktion zu verleimen. Zum Schutz gegen Beschädigungen sowie zur Schaffung einwandfreier Verbindungsstellen wurden allerdings die Kanten mit Holzleisten geschützt und aus Holz bestehende Flansche aufgeklebt.

Zur Glättung der Oberfläche sowie zu ihrem weiteren Schutze wurde der Kanal in- und auswendig mit Araldit-Spachtelharz 880 AB bearbeitet. Dieser Überzug, der speziell für diesen Zweck von der CIBA entwickelt wurde, zeigte auch bei den tiefsten Temperaturen noch eine gewisse Elastizität, die der sonst allgemein zu beobachtenden Rissbildung entgegenwirkt. Allerdings scheint eine extrem starke Strapazierung mit ständigen Temperaturwechseln und Vereisungen eine Durchweichung des Anstriches und eine Verminderung seiner Haftfähigkeit an den Platten zur Folge zu haben. Die Unterteilung des Kanals erfolgte meist in 1 m lange Stücke, die mit aufklappbaren Schrauben leicht getrennt und wieder zusammengesetzt werden können. Zur Einführung von Meßsonden und Einspritzdüsen oder auch zu Beobachtungszwecken sind verschiedene Deckel und Klappen angebracht.

4.3 *Das Gebläse*

Die Erzeugung der verlangten Luftgeschwindigkeit geschieht mittels eines Sulzer-Radialgebläses, das durch einen Gleichstrom-Nebenschlussmotor angetrieben wird. Die variable Feldspannung wird über eine Tyratrongruppe produziert. – Zur Vermeidung von Druckstößen wurde eine Drehzahlpräzision von besser als 1% über den ganzen Drehzahlbereich von 100 bis 3000 U/min gefordert, unabhängig von der Belastung des Motors. Diese Bedingung konnte mit einem elektronischen Regelverstärker eingehalten werden, der den Befehl des Präzisionspotentiometers (zur Sollwert-Drehzahleinstellung) vergleicht mit dem gebläsegekuppelten Tachodynamo. Eine allfällige Abweichung zwischen Soll- und Istwert wird sofort auskorrigiert (Lieferfirma Sprecher & Schuh AG).

4.4 Die Kälteanlage

Der prinzipielle Aufbau des Hagelversuchskanals hat zur Folge, dass die geforderte Feuchte der Kanalluft stetig beigegeben werden muss. Im Extremfall ist daher anzunehmen, dass sämtliches eingespritzte Wasser in fester oder flüssiger Phase während eines Kreislaufes im Kanal oder am Luftkühler niedergeschlagen wird. Der Wasserdampf selber dürfte bis auf den Dampfdruck über dem kältesten Teil kondensieren oder sublimieren. – Die aufzuwendende Kälteenergie ist aus diesem Grunde verhältnismässig gross und steigt proportional mit dem Wassergehalt pro Kubikmeter Luft und der Luftgeschwindigkeit. – Der Vorteil der Methode liegt im einfachen Aufbau der Versuchsanlage sowie der grossen Variabilität der Versuchsatmosphäre.

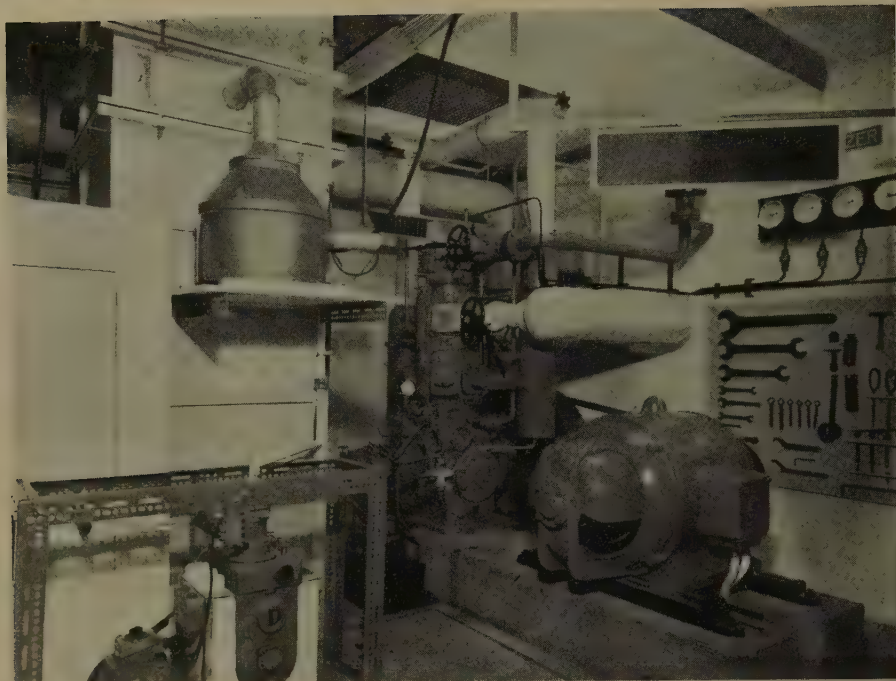
Nachstehend in Abschnitt 4.7 besprochene Eigenheiten der Tropfenerzeugung verlangen eine Heissdampfeinspritzung in den Kanal, die allein gewisse kleinste Tropfengrössen bei noch einigermassen vernünftigen Apparatebedingungen garantiert. Der Kältebedarf wird aber damit gegenüber einer direkten Wassereinspritzung um einen Faktor von rund 7 vermehrt! Daher rührt das Verlangen, mit der Kälteanlage Temperaturen von -60°C zu erreichen, damit das resultierende Wasser-Luft-Gemisch eine tiefste Temperatur von -40°C erreiche (gemäss Bedingungen in Abschnitt 2.3).

Auf Grund des dadurch vorgeschriebenen Kältebedarfes – er wird später explizit berechnet – plante die Firma Sulzer die Kälteanlage. Als Maschinentyp konnte sie einen 2stufigen Serientyp CV 180 (Figur 3) verwenden, der durch Aufbau einer speziellen dritten Stufe ein besonders auch bei tiefsten Temperaturen vorteilhaftes Leistungsdiagramm aufweist. Als Arbeitsmedium wurde Ammoniak gewählt, das direkt im Luftkühler verdampft. Der Kältekompressor wird durch einen 25-PS-Motor wahlweise auf 360 oder 720 U/min betrieben.

Eine gewisse Komplizierung der Kälteanlage ergab sich durch den Standort und die damit verbundene Unmöglichkeit einer Wasserkühlung des Ammoniakkondensors sowie des Kompressors selber. So wurde auf eine Aussenluftkühlung gegriffen, die sich auch bei leicht stürmischem Wetter bewährte (Figur 1, Positionen 9 und 10).

Um eine allzu grosse Überhitzung der Ammoniakdämpfe in den einzelnen Verdichtungsstufen zu verhindern, wurden zusätzlich zwei Zwischenkühler eingebaut, die nach Bedarf automatisch zum Einsatz kommen. Der Luftkühler oder Verdampfer (Figur 2, Position 2) im eigentlichen Windkanal ist als Rippenrohrsystem ausgebildet, durch das die Luft mit einer rund 8mal kleineren Geschwindigkeit als durch die Meßstelle streicht.

Die Steuerung der Kälteleistung kann auf zwei Arten geschehen: die erste Art ist von Bedeutung, wenn tiefere Temperaturen auf schnellstem Wege erreicht werden sollen. Sie besteht in einer Leistungssteuerung, die eine Einstellung eines Motorventils (Figur 1, Position 12) in der Ammoniaksausleitung so



Figur 3
Der Kältekompressor.

wählt, dass die Kompressormotorleistung mit dem eingestellten Sollwert übereinstimmt. Insbesondere kann damit bei Maximalleistung durch das Temperaturgebiet gefahren werden, bei dem der Kompressor mehr Energie aufnehmen kann, als der Motor abgibt. Dies kann der Fall sein bis zu Verdampfertemperaturen von rund -5°C bei Tourenzahl I und -30°C bei Tourenzahl II; diese Werte werden aber auch durch die Kondensationstemperatur des Ammoniaks beeinflusst, das heisst durch die Aussenlufttemperatur.

Die zweite Steuerart erlaubt ein Erreichen und die Einhaltung einer gewählten Verdampfertemperatur. Der Regelfühler befindet sich dabei allerdings nicht direkt am Verdampferelement, sondern im Luftstrom gemäss Position 10 von Figur 2. Die Regelung geschieht wiederum über das gleiche Motorventil in der Ammoniaksaugleitung, das bei Erreichen der Luftkühler-Sollwerttemperatur die Kälteleistung des Kompressors der Kälteabgabe am Verdampfer anpasst. Diese Steuermethode ist speziell von Vorteil bei der Einhaltung gleicher Ausgangsbedingungen einzelner Versuchsreihen. Als Regelsystem beliebte eine Rheoflex-Anlage der Firma Sauter AG.

4.5 Steuerung und Regelung der Meßstellentemperatur

In der Natur muss damit gerechnet werden, dass Eispartikeln in einer Gewitterwolke mit mehr oder weniger Aufwind laufend in kältere oder wärmere Zonen gelangen. Die Versuchsbedingungen bezüglich der Temperatur müssen daher auch im Hagelversuchskanal relativ rasch variiert werden können. Dieser Bedingung wirkt aber die Wärmekapazität der rund 1,2 t schweren Verdampferelemente entgegen, die den Hagelversuchskanal in dieser Hinsicht sehr träge gestalten. – So wurde denn das energetisch etwas unsinnige Prinzip angewendet, am Verdampfer mehr Kälte bei tieferen Temperaturen zu erzeugen, als im jeweiligen Versuch gebraucht wird. Der Kälteüberschuss wird mittels einer im Kanal eingebauten 19-kW-Heizung vernichtet (Figur 2, Position 3).

Da die durch den Luftstrom des Kanals geführten Heizdrähte praktisch trägheitslos eingesetzt werden können, ist damit zu rechnen, dass die Temperatur genügend rasch variiert werden kann, wenn auch der Verdampfer seine Temperatur praktisch beibehält. Da jedoch das Ausmass der Temperaturänderung wesentlich durch die Trägheit des Kanalstückes zwischen Heizung und Meßstelle beeinflusst wird, können nähere Daten nur durch entsprechende Messungen ermittelt werden (siehe Abschnitt 6.3).

Die Heizleistung kann auf jeden Zwischenwert eingestellt werden, nachdem die Lieferfirma (Sprecher & Schuh), ähnlich wie bei der Ventilatorsteuerung, auf eine Gleichstromspeisung gegriffen hat. Je nach den Impulsen eines elektronischen Steuerdispositivs werden Schalttyratrons eingesetzt, die in der Folge drei Ignitronröhren zünden. Die damit produzierten Gleichströme werden überlagert und der Kanalheizung zugeführt.

Der Einsatz der Heizung kann auf folgende Art geschehen:

a) *Handsteuerung*. An einem Potentiometer kann die gewünschte Heizleistung direkt in Kilowatt eingestellt werden.

b) *Temperaturregelung I*. Wird eine bestimmte Meßstellentemperatur gewünscht, so kann diese an einem Ferngeber eingestellt werden. Über einen Temperaturfühler sorgt ein elektronisches PID-Regelsystem (Fabrikat Hartmann & Braun, Frankfurt) für raschestes Erreichen des Sollwertes durch entsprechende Befehlsabgabe an das Steuerdispositiv der Kanalheizung. Infolge der vorteilhaften Konstruktion des Reglers «Regelux 3» kann durch eine dosierte, separate Einstellung der Proportionalregelung, des Vorhaltes und der Nachhaltezeit die optimalste Regelung entsprechend den Anlage- und Betriebsbedingungen erreicht werden.

c) *Temperaturregelung II*. Anstatt auf die Meßstellentemperatur kann auf die Verdampfertemperatur geregelt werden, was speziell beim Abtauen des Verdampfers, wo die Kälteanlage stillgelegt wird, von Vorteil ist.

d) *Temperatur-Programmsteuerung*. Ein Programmgeber ersetzt den Ferngeber der Temperaturregelung I und gestattet damit ein zum voraus gewähltes

Temperaturprogramm ablaufen zu lassen. (Die Planung des gesamten Temperaturregelteiles wurde in Zusammenarbeit mit der Firma Camille Bauer AG, Basel, ausgeführt.)

4.6 Die Filterstrecke

Die Reinigung der Luft, insbesondere von den eingespritzten Eisbildungskern-Substanzen, obliegt dem elektrostatischen Luftfilter, Fabrikat Trion AG, Zürich. Dessen vorteilhafte Eigenschaften wurden bereits früher beschrieben [13], so dass auf eine Wiederholung verzichtet werden kann.

4.7 Die Befeuchtungs- und Ausgleichsstrecke

Die Befeuchtungs- und Ausgleichsstrecke übernimmt trockene und gereinigte Luft einer bestimmten Temperatur aus dem Temperierungs- und Filterteil und schafft durch Zugabe von Feuchtigkeit flüssigen oder dampfförmigen Charakters innerhalb der Ausgleichsstrecke das gewünschte Klima. Die Länge der Ausgleichsstrecke wird, wie schon erwähnt wurde, bestimmt durch die Zeit, in der eine Anpassung der Temperaturen der erzeugten Wassertropfen an die der Umgebungsluft erfolgt. Eine theoretische Berechnung dieser Verhältnisse zeigte in der Folge, dass eine Ausgleichsstrecke von 2 m Länge genügt, sofern nur Tropfen eingespritzt werden. Praktische Versuche zeigten sogar auch stationäre Mischtemperaturen bei Dampfeinspritzung und nachfolgender Kondensation und Abkühlung.

Die Produktion von Tropfengesamtheiten verschiedener Tropfendurchmesser und Konzentrationen stellt eines der schwierigsten Probleme der Erzeugung atmosphärischer Verhältnisse dar. Im Gegensatz zu den grossräumigen Gewitterwolken komplizieren sich die Verhältnisse in einem Laboratoriums-Experimentierraum durch das Vorhandensein von Wänden. Meist ist es da nicht möglich, Wasser in flüssiger Phase durch Expansion nahezu gesättigter Luft zu erhalten. Die entsprechenden apparativen Bedingungen sind zu kompliziert, auch spielt der Zeitfaktor eine ungünstige Rolle, müssten wir doch die Kondensation auf kurzen Wegstücken produzieren. Daher ist es nicht verwunderlich, dass auf verschiedene andere denn beim Wettergeschehen vorkommende Tropfenproduktionsvarianten gegriffen werden musste.

Als Hauptbedingungen an die Erzeugungsmethodik sind zu erwähnen:

1. Keine merkliche Beimischung kanalfremder Luft.
2. Die eingespritzten Tropfen dürfen keine allzu hohe Geschwindigkeit haben; es soll der Impuls der eingespritzten Feuchte nur ein Bruchteil des Impulses der dazugehörigen Luftmenge sein. (Damit sollten die Störungen, die sich auf die Strömung übertragen, auf ein erträgliches Mass reduziert werden.)

Diese beiden Einschränkungen liessen verschiedene sonst gebräuchliche Methoden als unbrauchbar erscheinen, so zum Beispiel jegliche Tropfenerzeu-

gung mit Beimischung von Pressluft an der Düse. Die zur Produktion kleinster Wasserpartikeln ohne Pressluft notwendigen hohen Drucke (einige 100 kg/cm^2) mussten ebenfalls fallengelassen werden. So ergaben sich schliesslich noch folgende brauchbaren Erzeugungsarten:

a) Für Tropfen mit Durchmessern der Grössenordnung 1μ : Einführung von kondensierendem Heissdampf in die Kaltluft des Kanals.

b) Für Tropfen von 5 bis 20μ : Einführung eines in einem mechanischen Zerstäuber erzeugten Tropfen-Luft-Gemisches (die beigemischte Luftmenge ist hier relativ klein).

c) Für Tropfen mit Durchmessern von 20μ und mehr: Einspritzung von Wasser durch konische Schleuderdüsen.

Die entsprechenden Apparate sind:

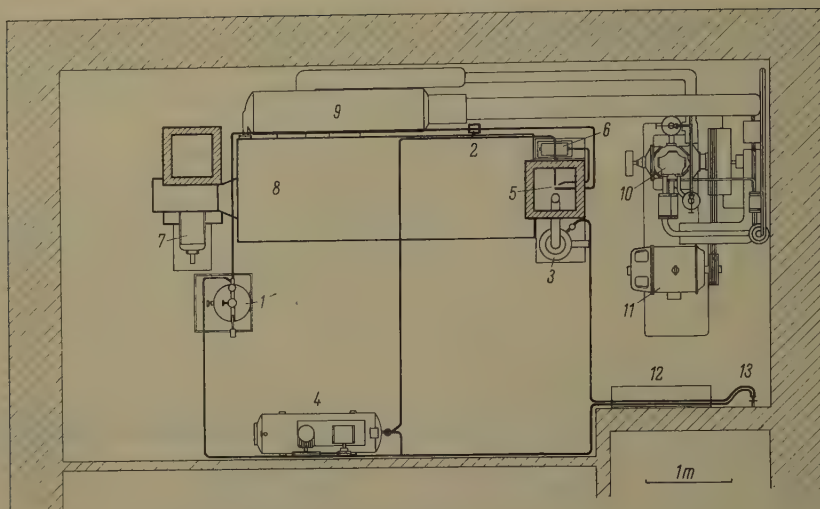
ad a) *Dampfkessel*: Der Heissdampf wird in einem Elektrodendampfkessel mit einer Stundenleistung von 20 bis 40 kg bei einstellbarem, konstantem Druck erzeugt. Die Beimischung zur Kanalluft erfolgt über ein fernsteuerbares Motorventil, das geeichte Dampfmengen ausströmen lässt.

ad b) *Zerstäuber*: Eine energetisch interessante Produktion kleiner Tropfen kann über eine rotierende Schleuderscheibe geschehen. Durch stetige Wasserzuführung wird auf dieser Scheibe ein abgleitender Wasserfilm erzeugt, der laufend auf ein umrahmendes Kammsystem aufprallt. Die Wasserhaut zerplatzt darauf zu nicht benetzenden Tröpfchen, die in hohen Konzentrationen von einer geringen, automatisch mit angesogenen Luftmenge mitgenommen und der zu befeuchtenden Kanalluft beigemischt werden. Der Wassernachschub geschieht vollautomatisch über ein schwimmergesteuertes Magnetventil.

ad c) *Schleuderdüsen*: Durch einen Luftkompressor, dessen Vorratsgefäss zum Teil mit Wasser gefüllt ist, kann letzteres über ein Magnetventil in eine Schleuderdüse geführt werden. Das Wasser wird in dieser tangential eingeleitet und zerspritzt direkt in die Kanalluft. Durch Variation des aufgewendeten Druckes kann die Wassermenge dosiert werden. Für speziell konstante Bedingungen wird anstelle des Kompressors eine Pressluftflasche über ein Reduzierventil auf das Luftkissen im Wasservorratsgefäss geschaltet. – Die Einspritzdüse ist zudem heizbar und kann ebenfalls fernbedient werden.

Der Aufbau dieser Anlagen geht aus Figur 4 hervor, die als Grundriss die Anordnung von Dampfkessel 1, Motorventil 2, Zerstäuber 3, Luftkompressor 4 und Befeuchtungsstrecke 5 darstellt.

Der Charakter der künstlich erzeugten Atmosphäre wird aber ausser durch Temperatur und Feuchte (und dem umgebenden, aber nicht variablen Luftdruck) weiter bestimmt durch die Art und Konzentration der Luftverunreinigungen, die speziell für die Einsatztemperatur des Gefrierprozesses verantwortlich sind, das heisst durch die Eisbildungskerne. Die Erzeugung derselben erfolgt nach der bereits früher beschriebenen Methode [13] durch Verdampfen spezieller Substanzen in einem Hochtemperatur-Rohröfen (Figur 4, Position 6).



Figur 4

Die Aufstellung der Feuchteproduktionsanlagen (Ansicht des untersten Stockwerkes von oben) (1:90). 1 Dampfkessel; 2 Dampfmotorventil; 3 Zerstäuber; 4 Luftkompressor; 5 Befeuchtungsstrecke; 6 Hochtemperaturofen; 7 Ventilatormotor; 8 Temperierungs- und Filterteil; 9 Flüssigkeitsabscheider; 10 Kältekompressor; 11 Kompressormotor; 12 elektrische Hauptverteilung; 13 Wasserzuleitungen.

Eine Sublimation dieser Dämpfe in durchströmender Luft ergibt Teilchen mit Durchmessern von 0,02 bis 0,05 μ , die der Kanalluft beigegeben werden können.

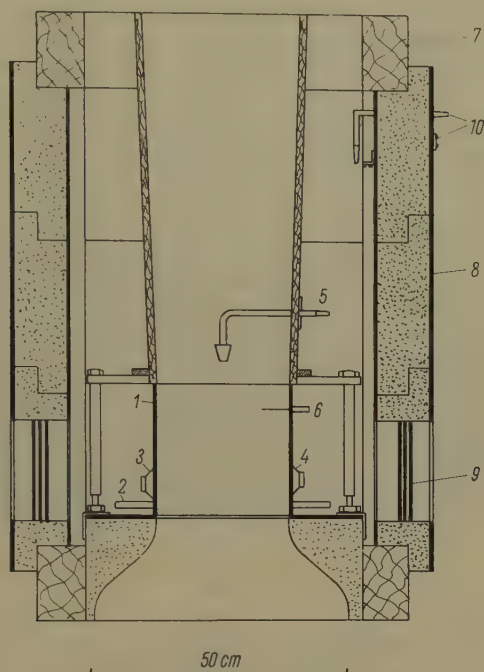
Über die Zusammenhänge zwischen Substanz und Gefriereinsatztemperatur sei zum Beispiel auf die Veröffentlichungen von PRUPPACHER und SÄNGER [17, 18] verwiesen.

Aus all diesen Ausführungen geht hervor, dass die Meßstellentemperatur nichts anderes darstellt als die Mischtemperatur, die sich ergibt, wenn der trockenen, kalten Luft des Temperierungsteiles Feuchte irgendwelcher Form beigegeben wird. Aber auch die Eisbildungskerne können diese resultierende Temperatur beeinflussen, sofern sie einen Phasenübergang flüssig-fest ganz oder teilweise vor der Meßstelle zur Folge haben. Die Untersuchung dieses letzten Falles ist besonders interessant für einen Vergleich des Wachstums eines Objektes in einem Aufwind mit angeströmten kleinern Partikeln flüssiger, fester oder gemischter Phase.

4.8 Die Meßstelle

Der Raum, in dem die eigentlichen Experimente stattfinden, wird als Meßstelle (Figur 5) bezeichnet. In ihr wird die Vereisung von aufgehängten oder frei im Luftstrom ausgeschwebten Objekten studiert. Im Gegensatz zu den andern

Kanalstücken, wo gleiche Elemente Luftstrombegrenzung und Isolation übernehmen, sind diese Funktionen bei der Meßstelle getrennt. Die direkte Begrenzung des Luftstromes ist, um diese Vorgänge sichtbar zu machen, aus Plexiglas 7 gehalten. Ein allfälliges Vereisen desselben kann durch Einschalten und



Figur 5

Schnitt durch die Meßstelle (1:15). 1 Plexiglasrahmen; 2 Strahlungsheizung; 3 Lautsprecher; 4 Mikrophon; 5 Feuchtesonde; 6 Temperaturfühler; 7 Meßstellenrahmen; 8 auswechselbare Abdeckplatten; 9 Fenster; 10 Durchführungen.

Leistungsregulierung der angebrachten zwei Strahlungsheizungsrohren 2 verhindert werden. Prinzipiell dienen zwei Gegenseiten zur Beobachtung, währenddem die gekreuzten Gegenseiten verschiedene Meßsonden aufzunehmen haben.

Ein äusserer Rahmen, unterteilt in einzelne, vertauschbare und teilweise mit Glasfenstern versehene Platten reduziert die Wärmeverluste. Dies hat den Vorteil, dass die Meßsonden nur durch das dünne Plexiglas eingeführt werden müssen, wobei zwischen diesem und der Isolation noch genügend Raum zum Auf- und Ausbau derselben besteht.

Zur Erleichterung einer Ausmessung des Luftstromes innerhalb des geraden Plexiglas Kanals sind auf zwei einander gegenüberliegenden Platten zwei Rasternetze eingeritzt, die eine rasche Einstellung der Meßsonden auf die bezeichneten

Positionen ermöglichen. Zur Einführung der Sonden sind auf den gekreuzten Gegenseiten Schlitze im Abstände von 3,5 cm angebracht, so dass im ganzen sieben Ebenen parallel zu den Rasterplatten erfasst werden können. Ein derart abgetasteter Luftstrom dürfte innerhalb der Meßstelle als genügend bekannt gelten. Das gerade Plexiglasstück der Luftstromführung – das Kernstück der Meßstelle – ist auf Schienen senkrecht zum Luftstrom beweglich. Dies ist ein grosser Vorteil, wenn darin aufgehängte, vereiste Objekte aus dem Kanalwind entfernt werden müssen.

4.9 Die Strömungsverhältnisse

Bei der Konstruktion des Windkanals wurde grosser Wert auf möglichst einwandfreie aerodynamische Gestaltung gelegt. Dabei ist speziell zu bemerken, dass eine Vernichtung grösserer Turbulenzen, herrührend vom Radialgebläse, bereits im folgenden Kanalstück mit dem Luftkühler erfolgt. Auch das aus einer Reihe paralleler Platten bestehende elektronische Luftfilter wirkt sich günstig auf die Gleichrichtung des Luftstromes aus. – Die Umlenkung in die Ausgleichsstrecke erfolgt unter Kontraktion durch vier Umlenkschaukeln, die eine gleichmässige Geschwindigkeitsverteilung im Vertikalteil gewährleisten. Vor der Meßstelle wird der Luftstrom nochmals in einem Effusor beschleunigt.

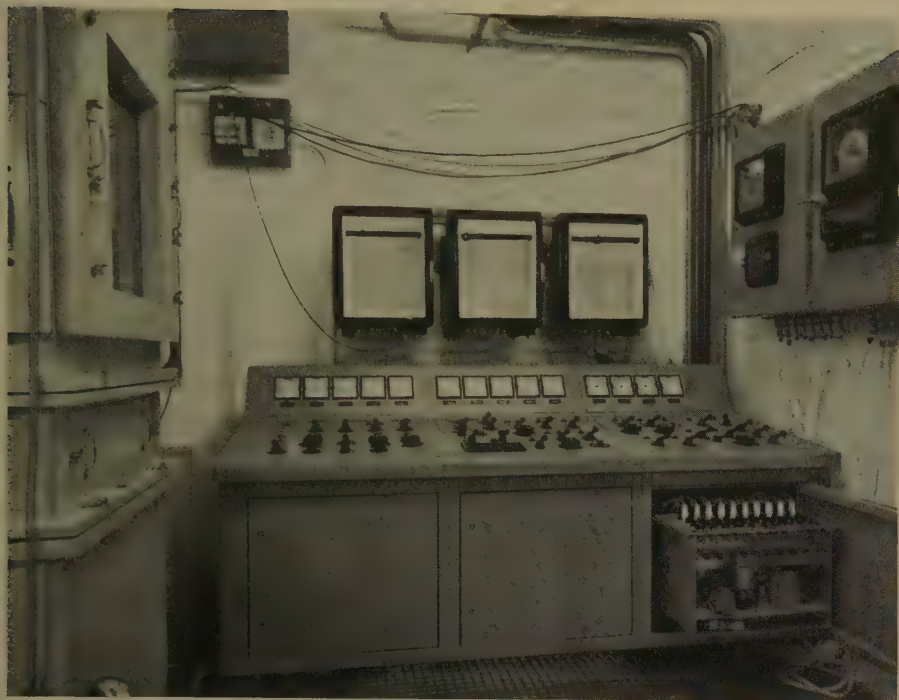
Eine Ausmessung der Geschwindigkeitsverteilung innerhalb der Meßstrecke ergab die Tatsache, dass, abgesehen von einer unwichtigen Randzone von 2,5 cm Mächtigkeit, die Abweichung von der mittleren Geschwindigkeit im Bereich von 1 bis 10 m/s 1% nicht überstieg; im Bereich von 10 bis 28 m/s betrug die maximale Schwankung 1,5%.

Der auf die Meßstelle folgende Diffusor wurde mit einem totalen Öffnungswinkel von 6° konstruiert und bürgt damit für eine möglichst vollständige Rückgewinnung der Druckenergie.

Was die grösste erreichbare Luftgeschwindigkeit anbelangt, so kann erwähnt werden, dass diese ohne weiteres durch Verengung des Meßstellenquerschnittes erhöht werden könnte. Zur Gleichmässigkeit der Luftgeschwindigkeit ist zu vermerken, dass diese nur gewünscht wird bei Experimenten mit fixierten Objekten. Frei ausgeschwebte Partikeln verlangen andere Verhältnisse mit ganz bestimmten Geschwindigkeits- und Druckverteilungen über den Querschnitt und die Länge der Meßstrecke [11], wie sie bis jetzt nur mit Einbauten von Gittern und Stauhauben erreicht werden konnten. Die einzige Ausnahme bilden die Versuche, wie sie am Aerodynamischen Institut der ETH mit Kurzdifusoren unternommen worden sind [10]. Doch soll an dieser Stelle nicht weiter auf diese Punkte eingegangen werden.

4.10 Das Steuerzentrum

Das Nervenzentrum des Hagelversuchskanals ist das Steuerpult (Figur 6). In ihm laufen alle Steuer- und Messleitungen zusammen. Der Aufbau geschah

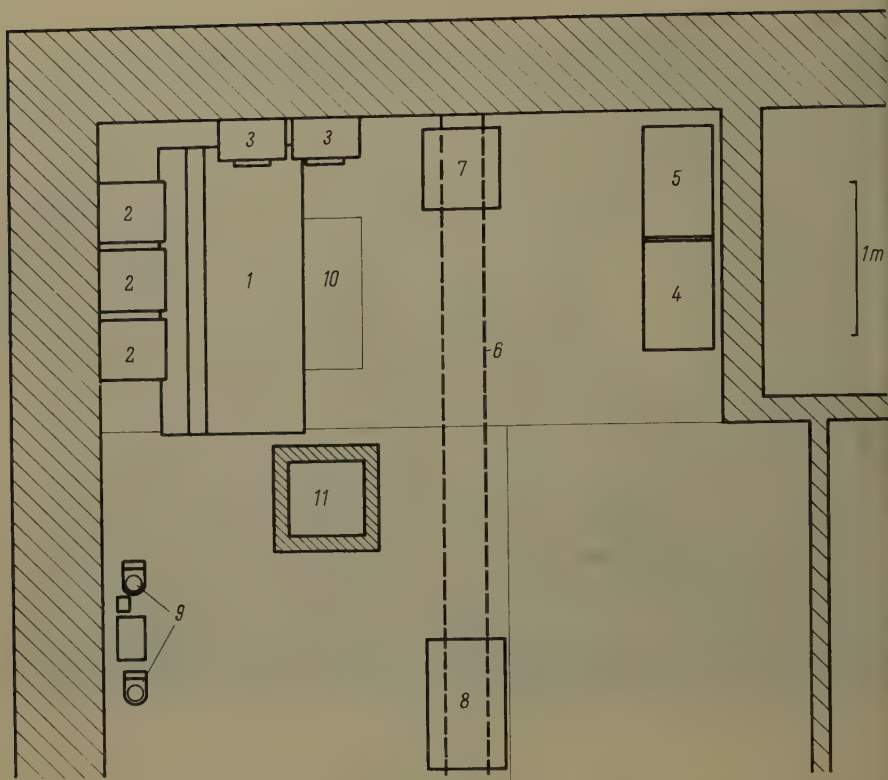


Figur 6
Das Steuerzentrum.

auch nach dem Baukastenprinzip, so dass Umbauten oder Ergänzungen der Verdrahtungen mit Leichtigkeit geschehen können. Die Messungen der verschiedenen Grössen erfolgt mit Ausnahme der Strommessungen über Röhrenvoltmeter-Schaltungen. Zehn solche Einheiten mit teilweise separater Basis und teilweise getrennter Speisung sind in einem Kasten untergebracht, wo die zu messenden Gleichspannungen angeschlossen werden können. Wechselspannungen werden zuerst über Steckeinheiten gleichgerichtet. Diese Messgeräte können an alle Spannungen zwischen 0,5 und 500 V so angepasst werden, dass jeder Zwischenwert auf den Anzeigeeinstrumenten des Pultes als Maximalausschlag von 100% registriert werden kann.

Das Steuerpult ist fahrbar und wird über 16 Zehnfachkabel mit den übrigen Apparaten verbunden.

Die Anordnung des Messbodens ist aus Figur 7 ersichtlich, die die Lage des Steuerpultes 1 direkt vor der Meßstelle darstellt. Über dem Steuerpult in Augenhöhe liegen auch die drei Kompensationsschreiber 2, die die Protokollführung übernehmen. Der eine dient zur Registrierung der Meßstellentempera-



Figur 7

Apparateanordnung auf dem Messboden (1:50). 1 Steuerpult; 2 Kompensationsschreiber; 3 Verteilerkasten mit Temperaturregelung; 4 elektronische Umformergruppe zu Ventilator; 5 elektronische Umformergruppe zu Heizung; 6 Hängebahn; 7 Temperatur-Schallmessanlage; 8 Feuchte- und Eisbildungskernmessung; 9 elektrische Druckwandler; 10 Rost; 11 Meßstelle.

tur; er ist ausgeführt als Linienschreiber. Die beiden andern Registriergeräte sind 12-Punkt-Schreiber (Fabrikat Hartmann & Braun, Frankfurt), wobei der eine Temperaturen druckt, der andere in Gleichspannungen von 0 bis 10 mV umgewandelte elektrische Größen. Die Umwandlung dieser Größen und ihre Reduktion erfolgt im Verteilerkasten rechts, wo auch die Geräte zur Temperaturregelung und Programmgebung eingebaut sind. Die beiden Gerätekasten 4 und 5 beherbergen die Umformergruppen für Ventilator- und Heizungssteuerung, währenddem die gestrichelten Linien eine Hängebahn 6 andeuten, an der Gestelle mit der Temperaturmessung über die Schallgeschwindigkeit 7 (siehe Abschnitt 7.2), der Feuchte- und Eisbildungskernmessung 8 hängen. 9 weist auf die elektrischen Druckwandler zur Luftgeschwindigkeitsmessung hin.

Als weitere Erleichterung ist im Messzentrums-Boden ein Rost 10 eingelassen, der die Überwachung des Kompressors gestattet; über ein Spiegelsystem lassen sich dessen Arbeitspunkte anhand von Manometern ablesen.

Diese Anordnung und dieser Aufwand hat zur Folge, dass einfachere Messungen gut von einem einzigen Mann ausgeführt werden können. Für kompliziertere Experimente ist eine zweite Kraft einzusetzen.

5. Die Leistung des Hagelversuchskanals bei stationärem Betrieb

Die Bedingungen, die an den Hagelversuchskanal gestellt wurden (siehe Abschnitt 2.3), betreffen eigentlich nur einzelne Arbeitspunkte. Es dürfte daher interessant sein zu verfolgen, erstens wie sie eingehalten werden können und zweitens, wie die Leistungsfähigkeit in den Zwischengebieten verläuft. Die Kenntnisse der Leistungsfähigkeit sind zudem von ausserordentlicher Bedeutung für die Gestaltung des Versuchsprogrammes über die Wachstumsbedingungen von Eispartikeln. Es wird auch auf Grund dieser Messungen möglich sein, abzuschätzen, ob und wie weit extremere Verhältnisse erzeugt werden können, als sie bei der Bildung von schwerem Hagel wahrscheinlich sind.

Die Leistungsmessungen zerfallen prinzipiell in zwei Gruppen:

1. Das Verhalten des Hagelversuchskanals bei stationären Betriebsbedingungen.
2. Das Verhalten des Hagelversuchskanals bei instationären Betriebsbedingungen.

In diesem Abschnitt soll nur von der ersten Gruppe gesprochen werden, währenddem die zweite dem folgenden Abschnitt Inhalt gibt.

Wenn wir eine allgemeinere Energiegleichung für den stationären Fall aufschreiben, so lautet sie prinzipiell wie folgt:

$$K = Q_F + Q_H + Q_V . \quad (5)$$

Dabei sind:

K Kältemenge pro Stunde, zugeführt durch den Kompressor;

Q_F Leistung, zugeführt durch die eingespritzte Feuchte;

Q_H stündliche Wärmemenge, zugeführt durch die Heizung;

Q_V Leistungsverluste durch Wärmeleitung durch die Kanalwand zusätzlich der vom Gebläse und den Wirbelverlusten erzeugten Wärme.

Die Betrachtung der einzelnen Grössen zeigt:

a) Die Leistung des Kompressors K ist nur theoretisch bekannt und kann leider nicht einfach gemessen werden. Sie ist zudem abhängig von der Kondensationstemperatur des Ammoniaks, die ihrerseits infolge der Luftkühlung von der Aussenlufttemperatur abhängig ist. Eine Rolle spielt ferner der Betriebszustand, das heisst angesammelte Ölmengen in den Zwischenkühlern der Kompressorstufen usw.

b) Die durch Einspritzen von Feuchtigkeit zugeführte Leistung Q_F kann genau errechnet werden.

Die entsprechende Formel für Wassereinspritzung lautet:

$$Q_F = w_f [(t_f - t_M) c_w + S] v_M F_M. \quad (6)$$

Die Dampfeinspritzung ergibt sich zu:

$$Q_F = w_D [(t_D - t_M) c_w + L + S] v_M F_M. \quad (7)$$

Dabei sind:

- w_f Menge des eingespritzten flüssigen Wassers [kg/m^3];
- w_D Menge des eingespritzten Dampfes [kg/m^3];
- t_f Temperatur des eingespritzten Wassers [$^{\circ}\text{C}$];
- t_D Temperatur des eingeführten Dampfes [$^{\circ}\text{C}$];
- t_M Temperatur an der Meßstelle [$^{\circ}\text{C}$];
- c_w spezifische Wärme von Wasser [kcal/kg°];
- S Gefrierwärme des Wassers [kcal/kg];
- L Verflüssigungswärme des Wasserdampfes [kcal/kg];
- v_M Luftgeschwindigkeit an der Meßstelle [m/h];
- F_M Querschnittsfläche der Meßstrecke [m^2].

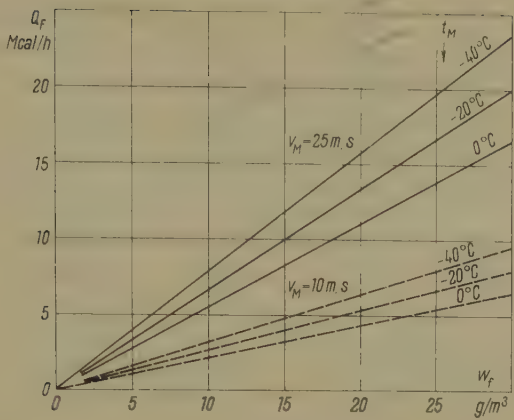
Die mit Formel (6) ermittelten Daten sind für Luftgeschwindigkeiten von 10 und 25 m/s in Figur 8 eingetragen. Als Temperatur des eingespritzten Wassers wurde 10°C eingesetzt, die Meßstellentemperatur wurde mit 0° , -20° und -40°C gewählt ($F_M = 0,0676 \text{ m}^2$). Analoge Werte für Dampf zeigt gemäss Formel (7) Figur 9, wobei als Dampftemperatur 100°C gilt.

Ein Vergleich dieser beiden Darstellungen weist darauf hin, dass bei Wassereinspritzung die Meßstellentemperatur einen relativ grossen Einfluss hat, währenddem dieser bei Dampfeinspritzung nahezu verschwindet.

c) Die durch Heizung zugeführte Wärmemenge Q_H kann durch Messung des Stromes und der Spannung ermittelt werden.

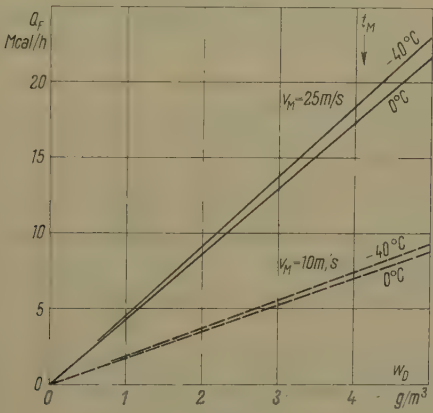
d) Die Verluste Q_V zerfallen in zwei Teile. Der erste umfasst die Wärmeentwicklung durch den Ventilator – sie sind nicht allzu gross, da sich der Antriebsmotor ausserhalb des Windkanals befindet – sowie die Wärmeentwicklung der Luftströmung an und für sich. – Dem Kanal wird auch Wärme von aussen zugeführt durch Wärmeleitung durch die Kanalwände hindurch. Dieser Effekt ist abhängig von der Isolationsfähigkeit der Kanalwandung sowie auch von der Luftgeschwindigkeit, die die Wärmeübergangszahl Kanalwand–Kanalluft bestimmt. Eine Hauptrolle spielt hier natürlich die antreibende Temperaturdifferenz zwischen Labor- und Kanalluft.

Aus diesen Betrachtungen ist zu ersehen, dass eine allgemeine, hinreichend genaue Erfassung der Energiebilanz des Kanals viel zu kompliziert wäre. Wir haben jedoch die Möglichkeit, durch günstig ausgelegte Messreihen auf einfache



Figur 8

Dem Kanal zugeführte Leistung Q_F als Funktion der Wassereinspritzung w_f , mit den Parametern Luftgeschwindigkeit und Meßstellentemperatur.

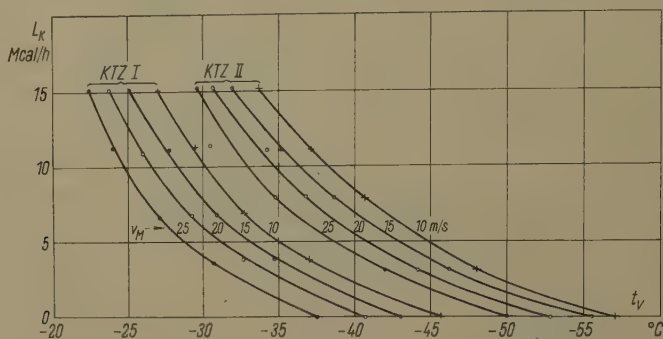


Figur 9

Dem Kanal zugeführte Leistung Q_F als Funktion der Dampfeinspritzung w_D , mit den Parametern Luftgeschwindigkeit und Meßstellentemperatur.

Weise ein zuverlässiges Bild der Leistungsfähigkeit des Hagelversuchskanals zu bekommen. Da es für die Kälteanlage gleich ist, ob Wärme über Feuchtigkeit oder Heizung – nur diese sind auch im allgemeinen Experiment von Interesse – zugeführt wird, können diese Größen ohne weiteres vertauscht werden. Es ist hierbei in erster Linie an die Ersetzung der Feuchteinspritzung durch die einfacher zu handhabende Heizung gedacht. Die Kanalleistungsfähigkeit kann nun direkt gemessen werden, wenn bei einer gegebenen Luftgeschwindigkeit an der

Meßstelle die Heizung einer bekannten Leistung eingeschaltet wird und gleichzeitig der Kältekompressor auf Volleistung läuft. Jetzt braucht man nur ein Gleichgewicht mit konstanten Temperaturen abzuwarten, wo sich die Kälteleistung mit der Heizleistung und den Verlusten die Waage hält. Auf diese Weise kann unter Umgehung einer Messung und Abschätzung der Kanalverluste direkt die dem allgemeinen Experiment bei einer bestimmten Temperatur und einer gegebenen Luftgeschwindigkeit zur Verfügung stehende maximale grösste Leistung gemessen werden. Wird nun die Heizleistung verändert, so



Figur 10

Grösste Kompressorleistung L_K bei verschiedenen Luftgeschwindigkeiten v_M und den beiden Touren zahlen KTZ I und KTZ II als Funktion der Verdampfer Temperatur t_v .

ergeben sich andere Leistungswerte bei andern resultierenden Temperaturen. Figur 10 zeigt so ermittelte Daten bei der hohen und der niedrigen Kompressortourenzah für Luftgeschwindigkeiten von 10, 15, 20 und 25 m/s. Die Verschiebung der einzelnen Leistungskurven resultiert aus den unterschiedlichen Verlusten.

Es muss hier noch vermerkt werden, dass die für die Kälteleistung massgebende Temperatur immer die Ammoniak-Verdampfer Temperatur und nicht diejenige der Meßstelle ist! Wir möchten jedoch ein Bild, das zeigt, wie es sich mit der letzteren verhält.

Die Beziehungen zwischen der Temperatur an der Meßstelle und am Verdampfer können am einfachsten über die zwischen dem Verdampfer und der Meßstelle zugeführte Energie erfasst werden, wenn wir diese aufteilen pro durchgeströmten Kubikmeter Luft und mit der zugehörigen spezifischen Wärme und einer mittleren Luftdichte dividieren. So resultiert die Temperaturerhöhung auf Basis der Verdampfer Temperatur.

Die entsprechende Formel lautet:

$$t_M = t_v + \frac{Q'_F + Q_H + Q'_V}{\varrho_L F_M v_M c_L} \quad (8)$$

Die neu eingeführten Symbole bedeuten:

t_V Temperatur des Verdampfers [$^{\circ}\text{C}$];

Q'_F bis zur Meßstelle durch Feuchte zugeführte Leistung [kcal/h];

Q_H Leistung, zugeführt durch Heizung [kcal/h];

Q'_V Verluste zwischen Verdampfer und Meßstelle [kcal/h];

c_L spezifische Wärme der Luft [kcal/kg $^{\circ}$];

ϱ_L mittlere Luftdichte [kg/m 3].

Die bis zur Meßstelle durch Feuchte zugeführte Energie Q'_F ist nicht mit der totalen Energie Q_F , gemäss Gleichung (6) oder (7), gleichzusetzen. Normalerweise sind ja die Wassertropfen bis zum Testobjekt nicht vereist. – Da jedoch ein Teil des eingeführten Wassers bereits in der Ausgleichsstrecke an den Wänden abgelagert und ausgefroren wird, kann trotzdem näherungsweise Q'_F durch Q_F (Figur 8) ersetzt werden. In Wirklichkeit sind aber meist günstigere Werte zu erwarten.

Werden der aktuelle Meßstellenquerschnitt von 0,0676 m 2 und eine mittlere Luftdichte von 1 kg/m 3 ($t = -20^{\circ}\text{C}$, $p_{Baro} = 550$ mm Hg) in Rechnung gesetzt, so ergeben sich Darstellungen der Funktion t_M gemäss den Figuren 11 und 12. Die Figur 11 zugrunde gelegte Luftgeschwindigkeit beträgt 10 m/s, währenddem Figur 12 für 25 m/s gerechnet ist. Die Verluste Q'_V sind direkt aus der Messung ermittelt worden bei $Q_F = Q_H = 0$, ebenso die Grenzleistung des Kompressors bei Tourenzahl II, die aus Figur 10 übernommen worden ist. Das mit der Anlage durchfahrbare Gebiet befindet sich links der Grenzleistungskurve.

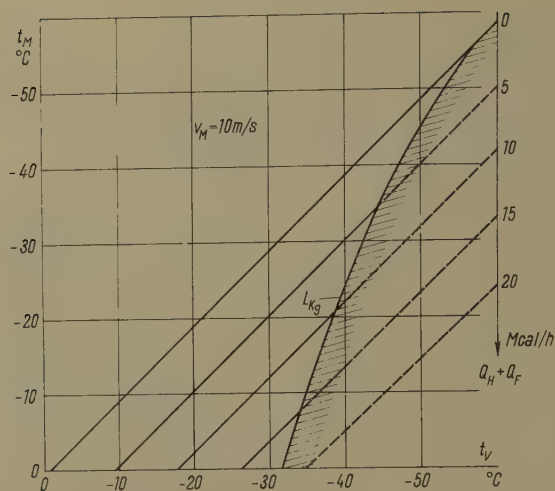
Der Vergleich von Figur 11 mit Figur 12 zeigt, dass die Differenz von Verdampfer- und Meßstellentemperatur bei gleicher zugeführter Energie mit kleinerer Luftgeschwindigkeit grösser wird. Dies ist verständlich, wird doch eine kleinere Luftmenge durch eine gleichbleibende Wärmezufuhr stärker erwärmt als ein grösseres Luftvolumen.

Es muss hier noch auf zwei Punkte hingewiesen werden, die auch für das Folgende Gültigkeit haben:

a) Die Grenzleistungskurve kann sich je nach Witterungsverhältnissen verschieben. Da aber bei einer mittleren Aussenlufttemperatur von $+2^{\circ}\text{C}$ gemessen wurde, dürfte es sich um eine über das Jahr hindurch mittlere Lage handeln. Im Winter sind durchschnittlich grössere Leistungen zu erwarten als im Sommer.

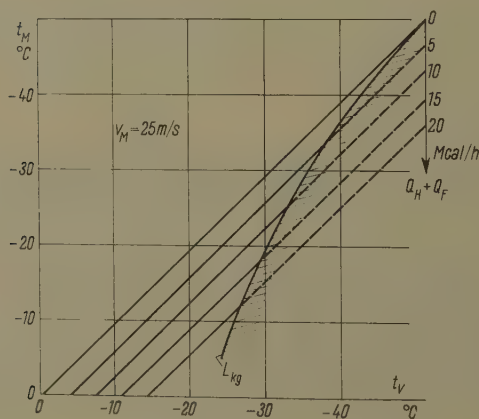
b) Der Fühler zur Ermittlung der Verdampfertemperatur ist am Rippenrohrsystem ausserhalb der Kanalströmung befestigt. Da die Temperaturverteilung am Luftkühler inhomogen ist und sich je nach Betriebsbedingungen etwas ändern kann, braucht der Meßwert nicht unbedingt mit dem effektiven Wert übereinzustimmen. Bei allen folgenden Darstellungen wird aber der gemessene Wert als Grundlage genommen.

Eine der wichtigsten Fragen, die bei stationärem Betrieb an den Hagelversuchskanal gestellt werden, geht nach dem Ausmass der grösstmöglichen Wassereinspritzung. Als Bezugstemperatur ist dabei die Meßstellentemperatur er-



Figur 11

Abhängigkeit der Meßstellentemperatur t_M von der Verdampfer­temperatur t_V als Funktion der zugeführten Leistung $Q_H + Q_F$, zugrunde gelegte Luftgeschwindigkeit $v_M = 10$ m/s. Die Kurve L_{Kg} stellt die Kompressor­grenzleistung bei Tourenzahl II dar.

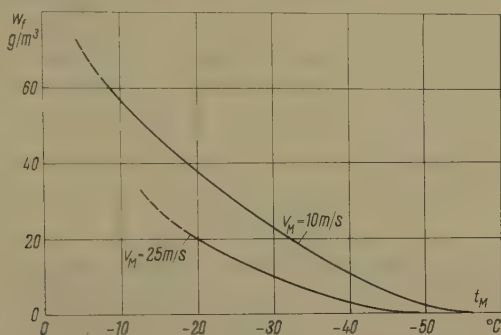


Figur 12

Abhängigkeit der Meßstellentemperatur t_M von der Verdampfer­temperatur t_V als Funktion der zugeführten Leistung $Q_H + Q_F$, zugrunde gelegte Luftgeschwindigkeit $v_M = 25$ m/s. Die Kurve L_{Kg} stellt die Kompressor­grenzleistung bei Tourenzahl II dar.

wünscht. Diese Beziehungen können anhand der Grenzleistungskurven des Kompressors gemäss Figur 10 sowie der Formeln (6) und (8) für Wassereinspritzung errechnet werden. Es resultiert damit bei der Bedingung $Q_F = Q'_F$ eine Darstellung gemäss Figur 13.

Umrechnungen auf Dampfeinspritzung können über Figuren 8 und 9 geschehen oder zur Ermittlung von Richtwerten durch Division der Wassermengen gemäss Figur 13 durch den Faktor sieben.



Figur 13

Grösstmögliche Wassereinspritzung w_f bei verschiedenen Luftgeschwindigkeiten v_M als Funktion der Meßstellentemperatur t_M (Kältekompressortourenzahl II).

Aus all diesen Daten ist ersichtlich, dass den Anforderungen an den Hagelversuchskanal bei stationärem Betrieb vollauf Genüge geleistet wird. Im Gegenteil könnte sogar die Frage aufgeworfen werden, warum die Kälteanlage speziell um 0°C eine so grosse, nicht geforderte Leistungsfähigkeit aufweist. Der Hauptgrund zu dieser Tatsache liegt darin, dass der Kompressor ausgelegt wurde, um auch Temperaturen von -50°C und tiefer zu erreichen. Da seine Leistungskurve jedoch gegen tiefere Temperaturen stark abfällt, resultierte schliesslich eine entsprechende Mehrleistung bei relativ hohen Temperaturen. Dies ist jedoch sehr nützlich, wenn rasch zu tieferen Experimentausgangstemperaturen gefahren werden soll, auch ermöglicht es, wie der folgende Abschnitt zeigen wird, grössere Möglichkeiten beim dynamischen Ausfahren des Hagelversuchskanals.

6. Das dynamische Verhalten des Hagelversuchskanals

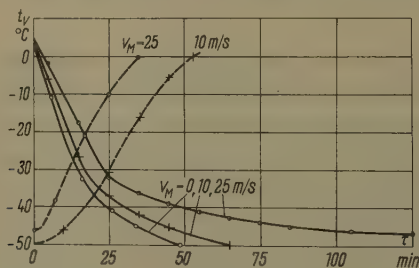
6.1 Allgemeines

Im Unterschied zum stationären Verhalten des Hagelversuchskanals spielt beim Betrieb mit wechselnden Verhältnissen die Wärmekapazität der verschiedenen Apparateile eine entscheidende Rolle. Die Leistungsbilanz gemäss

Gleichung (5) wäre damit insofern abzuändern, als die Verluste durch Wärme-
 zuleitung Q_V ihrem Sinne nach erweitert werden müssen und auch die stünd-
 liche Energie, die gebraucht wird, die verschiedenen Kanalteile in ihrer Tem-
 peratur an die Lufttemperatur anzugleichen, zu umfassen hat. Das Vorzeichen
 dieses zusätzlichen Betrages hängt jeweils von den Betriebsbedingungen ab.
 Die Hauptursache für die Wärmeträgheit des Hagelversuchskanals bildet der
 Verdampfer -- er besteht aus rund 1,2 t Eisen -- währenddem Heizung und
 Filter inklusive Übergangsstücken aus etwa 50 kg Aluminium bestehen. Die
 eigentliche Kanalisolation aus Zublanitplatten dürfte infolge der geringen
 Dichte und kleinen Wärmekapazität keinen bedeutenden Einfluss auf die
 Trägheit der Temperaturanpassung haben. Von grösserer Bedeutung ist die
 direkte Kanalbegrenzung gegen innen, der Aralditharzanstrich.

6.2 Der Einfluss der Kanalträgheit bei stetiger, gleichsinniger Temperatur- änderung

Die Wärmeträgheit des Windkanals wird zuerst sichtbar, wenn der Kälte-
 kompressor eingeschaltet wird, um zu tieferen Kanaltemperaturen zu fahren.
 Die dabei zu beobachtende Abhängigkeit der Verdampfertemperatur von der
 Abkühlungszeit ist für Luftruhe $v_M = 0$ sowie für die Geschwindigkeiten $v_M = 10$
 bzw. 25 m/s in Figur 14 aufgetragen (durchgezogene Linien). Durch das Grös-



Figur 14

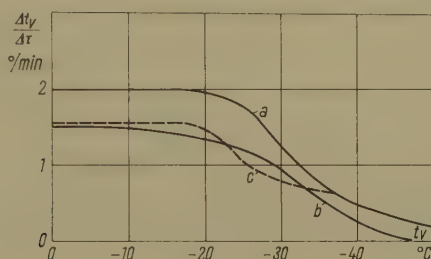
Abkühlungs- und Aufheizkurven, gefahren bei höchster Leistung und verschiedenen Luftgeschwindigkeiten.

werden der Verluste bei ansteigender Luftgeschwindigkeit wächst auch die
 Zeitspanne, in der eine bestimmte Verdampfertemperatur erreicht werden kann.
 (Diese Versuche wurden alle bei grösster Leistung auf Kompressortourenzahl II
 durchgeführt.)

Nach Erreichen einer Verdampfertemperatur von -50° bzw. -47°C wurde
 der Kompressor jeweils ausgeschaltet, um bei einem Heizeinsatz von 18 kW
 wieder gegen den Ausgangspunkt zurückzufahren. Die Darstellung dieser Ver-
 hältnisse erfolgt ebenfalls in Figur 14, jedoch durch die gestrichelten Linien. --

Im Gegensatz zur Abkühlung wird die Aufheizung durch eine grosse Geschwindigkeit begünstigt, da die mit ihr ansteigenden Kälteverluste im gleichen Sinne wie die Heizung wirken.

Eine Differenzierung gewisser Kurven von Figur 14 gibt uns ebenfalls für zwei Luftgeschwindigkeiten den eigentlichen Abkühlungsgrad gemäss Figur 15.



Figur 15

Abkühlungsgrade in Funktion der Verdampfertemperatur t_v : *a* bei grösster stetiger Temperatursenkung für eine Luftgeschwindigkeit $v_M = 10$ m/s; *b* bei grösster stetiger Temperatursenkung für eine Luftgeschwindigkeit $v_M = 25$ m/s; *c* maximale Abkühlung, ausgehend von stationären Betriebszuständen (praktisch geschwindigkeitsunabhängig).

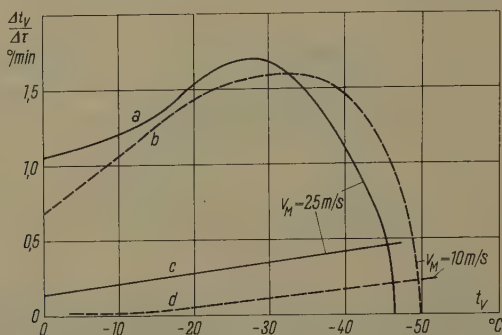
Das Hauptkennzeichen dieser Experimente liegt darin, dass hier die Verzögerung der Temperaturanpassung aller Kanalteile am extremsten ist!

Arbeitet jedoch die Anlage seit längerer Zeit bei der gleichen Verdampfer-temperatur und konstanten Betriebsverhältnissen, so ist anzunehmen, dass sich die Temperaturen der übrigen Kanalteile mit der Zeit ebenfalls auf konstante Werte einstellen. Wollen wir nun von einem solchen stationären Betriebspunkt mit angepassten Temperaturen mit Volleistung nach tieferen Temperaturen fahren, so wären eigentlich grössere Abkühlungsgrade zu erwarten als im weiter oben beschriebenen Falle, wo die Anpassung verzögert stattfindet. Infolge der Anpassungszeit des Kompressors an neue Betriebsbedingungen ist dies nicht der Fall; es ergeben sich für diesen Fall praktisch geschwindigkeitsunabhängige Daten, die im Mittel durch die gestrichelte Kurve von Figur 15 dargestellt werden.

Wird beim Aufheizen aus dem zeitlichen Verlauf der Verdampfertemperatur gemäss Figur 14 auf den Erwärmungsgrad umgerechnet, so ergeben sich die Kurven *a* und *b* von Figur 16. Was dabei sofort in die Augen fällt, ist der Umstand, dass der Erwärmungsgrad bei tiefsten Temperaturen 0 beträgt. Schuld daran dürfte die vorübergehende Weiterproduktion von Kälte durch Verdampfen des Ammoniaks sein, wenn der Kompressor abgeschaltet wird. Erst von einer Verdampfertemperatur, die höher ist als -30°C , stimmt das Bild, dass der Aufwärmungsgrad mit steigender Temperatur abnehmen soll, mit unserer Erwartung überein.

Vergleichsweise zeigt Figur 16 mit den Kurven *c* und *d* auch den Erwärmungsgrad ohne Heizeinsatz. Für diesen sind also nur die Kälteverluste sowie die durch den Ventilator erzeugte Wärme verantwortlich.

Hierbei muss noch erwähnt werden, dass die Differenz der Erwärmungsgrade mit Heizung nicht der Differenz ohne Heizung zu entsprechen braucht. Die Verzögerung des Kanals in der Temperaturanpassung ist ihr nicht ähnlich.



Figur 16

Erwärmungsgrad in Funktion der Verdampfertemperatur: *a* Heizeinsatz 18 kW, Luftgeschwindigkeit $v_M = 25$ m/s, ausgehend von -47°C ; *b* Heizeinsatz 18 kW, Luftgeschwindigkeit $v_M = 10$ m/s, ausgehend von -50°C ; *c* ohne Heizung, Luftgeschwindigkeit $v_M = 25$ m/s; *d* ohne Heizung, Luftgeschwindigkeit $v_M = 10$ m/s.

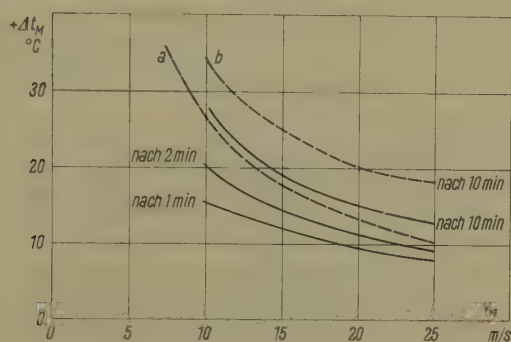
6.3 Die Änderung der Meßstellentemperatur bei gleichbleibender Verdampfertemperatur

Während der vorhergehende Abschnitt die Kanalträgheit und ihren Einfluss auf die experimentbestimmende Verdampfertemperatur beschrieb, sollen an dieser Stelle die Variationsmöglichkeiten der Meßstellentemperatur behandelt werden.

Wie wir aus den Beobachtungen an natürlichen Hagelkörnern wissen [9], sind diese vielfach schalenartig aufgebaut mit einem Wechsel klarer und opaker Schichten. Sobald nun solche Typen im Hagelversuchskanal reproduziert werden sollen, sind periodisch ändernde Wachstumsbedingungen vonnöten. Die Planung sah vor, dass die notwendigen Temperatur- oder auch Feuchteschwankungen bei gleichbleibender Verdampferblocktemperatur nur durch Variation des Heizeinsatzes erzeugt werden sollten. Zu diesem Zwecke kann der Kältekompressor mit Vorteil durch die in Abschnitt 4.4 beschriebene Steuerung betrieben werden, die die Kälteleistung so reguliert, dass der Verdampfer stets die gewünschte konstante Temperatur aufweist.

Die durch die Heizung erreichbare grösste Temperaturerhöhung entsprechend 18 kW Leistung ist in Abhängigkeit der Luftgeschwindigkeit als Kurve *a*

in Figur 17 eingetragen. Diese theoretisch mögliche Differenz stellt sich jedoch nicht augenblicklich ein. Die trägheitsbedingte Anpassung mit der Zeit ergibt sich, wie die durchgezogenen Kurven derselben Figur für Zeitintervalle von 1, 2 und 10 min zeigen. (Die letzte Zeitangabe stellt die Zeitspanne dar, in der mit einer praktisch vollständigen Temperaturanpassung gerechnet werden kann, sofern das experimentelle Vorgehen mit dem hier beschriebenen über-



Figur 17

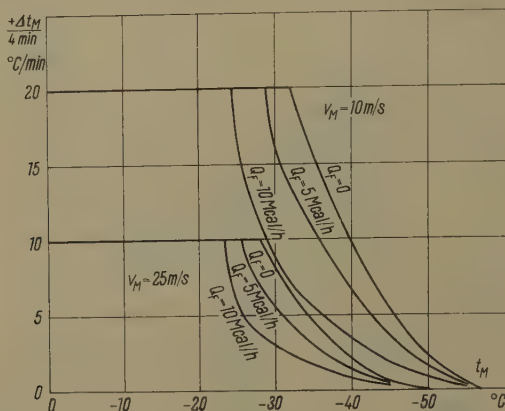
Zeitabhängige, durch Heizeinsatz von 18 kW erzeugte Erhöhung der Meßstellentemperatur t_M in Funktion der Luftgeschwindigkeit v_M (bei jeweils konstant gehaltener Verdampfertemperatur). Kurve *a*, theoretisch berechnete Werte; Kurve *b*, Werte, die erreicht werden mit im Moment der Aufheizung abgeschaltetem Kältekompressor.

einstimmt.) – Wenn der theoretisch mögliche Wert nach 10 min überschritten wird, so rührt das von der Berechnung der umgewälzten Luftmenge auf Grund der zentralen Meßstellengeschwindigkeit, ohne Berücksichtigung der am Rande auftretenden reduzierten Werte, her. Kurve *b* von Figur 17 zeigt die Temperaturen an, die sich bei jeweils abgeschaltetem Kompressor einstellen würden.

Die Abhängigkeit all dieser Werte von der Verdampfertemperatur ist, wie verschiedene Messungen im Bereiche von -5 bis -40°C ergeben haben, nicht von allzu grosser Bedeutung, so dass in Figur 17 Mittelwerte eingesetzt wurden. Es besteht jedoch die erwartete Tendenz, dass die zeitliche Verzögerung bei tieferen Temperaturen zu kleineren Werten strebt.

Da gemäss den vorgenommenen Messungen die Rückkühlung auf den Ursprungswert die gleiche Zeit braucht wie die Aufheizung, ist das Ausmass erzwungener periodischer Temperaturschwankungen bezüglich ihrer Amplitude im Zusammenhang mit der Periodendauer und der Luftgeschwindigkeit bekannt. Es muss jedoch die Einschränkung gemacht werden, dass die Kompressorleistung den jeweiligen Verhältnissen angepasst werden kann. Die Verhältnisse komplizieren sich weiter, wenn auch Feuchtigkeit in den Kanal eingespritzt wird. Diese beeinflusst jedoch, sofern sie konstant bleibt, die Temperaturvariationsmöglichkeiten gemäss Figur 17 praktisch nicht, es sei denn, dass

bei zeitweisen Temperaturen über 0°C eine zusätzliche Trägheit in Rechnung gezogen werden muss, die ihre Begründung in allfälligen Eisansätzen an der Kanalwandung hat. Da aber in Abhängigkeit des Feuchteaufwandes der Arbeitspunkt der Kälteanlage angepasst werden muss, ergeben sich Verhältnisse, die in Figur 18 abgeklärt werden sollen. Sie zeigt die grösste mögliche perio-



Figur 18

Darstellung der grössten, alle vier Minuten erzeugbaren periodischen Erhöhung der Meßstellentemperatur in Funktion der Meßstellentemperatur, bei zwei Luftgeschwindigkeiten und verschiedenen durch Feuchte zugeführten Energiemengen Q_F (Heizeinsatz maximal 18 kW).

dische Temperaturerhöhung bei einer 4 min dauernden Periode in Funktion der tiefsten Meßstellentemperatur. Als Parameter tritt die durch Feuchte eingespritzte spezifische Energie in Megakalorien auf, die Meßstellengeschwindigkeit wurde in einen Fall mit 10 m/s, im andern mit 25 m/s angenommen. Figur 18 demonstriert, dass bei gleicher Luftgeschwindigkeit oberhalb einer Meßstellentemperatur von -20°C das Ausmass der periodischen Temperaturerhöhung einzig durch den Einsatz der Heizung (jeweils 18 kW) bestimmt wird während unterhalb von -30°C die Kompressorleistung und die Feuchte die Amplitude beschränken.

Weiter kann festgestellt werden, dass sich bei gleicher Heizung die Amplitude nicht umgekehrt proportional zur Luftgeschwindigkeit verändert. Die Trägheit des Kanals wirkt sich bei grösseren Temperaturveränderungen verhältnismässig stärker aus; die Zeit zur Anpassung an den theoretischen Grenzwert steigt.

Aus all diesen Daten sollte nun die Leistungsfähigkeit des Hagelversuchskanals hinreichend bekannt sein, um die Möglichkeiten, die dem Experiment zur Verfügung stehen, erfassen zu können. Ob allerdings die erzeugbaren periodischen Schwankungen der Nachbildung der Natur genügen, lässt sich disku-

tieren. Die Entscheidung auch dieser Frage wird aber erst ein Vergleich entsprechender natürlicher mit künstlich erzeugten Hagelkörnern ergeben.

7. Messmethoden

7.1 Grundsätzliches

Die Messungen der Experimentparameter sind mit Schwierigkeiten verbunden, sobald wir den Charakter einer Atmosphäre mit unterkühlten Wassertropfen ermitteln müssen. Diese Tropfen gefrieren bei den vorkommenden Bedingungen nicht ohne Anwesenheit von Eisbildungskernen. Das gilt jedoch nur für den Fall, wo sie ganz von Luft umgeben sind. Sobald sie auf Oberflächen auftreffen, setzt meist sofort der Gefriervorgang ein. – Das heisst, dass jegliche Sonden, die wir als Messfühler in den Windkanal einführen, sich sogleich mit einem Eisansatz bedecken. Dieser Vorgang könnte wohl bei Temperaturen, die nur wenig unter 0°C liegen, etwas eingedämmt werden, bei extremeren Temperaturen ist jedoch kein Gegenmittel bekannt. Wie sich diese Tatsache auf die einzelnen Parameter auswirkt, soll in den folgenden Abschnitten dargestellt werden.

7.2 Die Temperaturmessung

Der schlimmste Einfluss des Eisansatzes auf Sonden wirkt sich auf die Temperaturmessung aus. Infolge Freiwerdens der Gefrierwärme wird der Fühler eine gegenüber der Umgebungstemperatur meist zu hohe Temperatur anzeigen. – Es muss hier noch vermerkt werden, dass bei diesen Bemerkungen stillschweigend angenommen wird, dass die Luft zumindest mit Wasserdampf gesättigt, eventuell sogar übersättigt ist, was auf Grund der Tropfenerzeugungsmethodik der Fall sein sollte.

Als beste Abschirmmethode ist der Schutz eines feinen Thermoelementes durch den Windschatten eines dünnwandigen Plexiglasrohres zu erwähnen. Aus der Menge des angelagerten, gefrierenden Wassers sowie der Grenzschichtdicke und der Luftgeschwindigkeit kann die Erwärmung der das Thermoelement umströmenden Luft abgeschätzt und ein entsprechender Korrekturwert angebracht werden.

Diese Methode erlaubt es aber prinzipiell nur, zu einzelnen Zeitpunkten Messungen vorzunehmen, da sonst die Verhältnisse an der Meßstelle allzu stark beeinflusst würden. Sie ist also speziell brauchbar bei Experimenten mit stationären Betriebsbedingungen.

Als weiterer Weg zur Temperaturmessung wird eine über den Kanalquerschnitt integrierende, sondenlose Methode verwendet, die auf der Basis der temperaturabhängigen Schallgeschwindigkeit arbeitet. Ein Ton wird durch einen Lautsprecher quer durch die Meßstelle geschickt und über ein Mikrophon

empfangen (siehe Figur 5). Die Phasendifferenz der Schwingung zwischen Lautsprecher und Mikrophon ist direkt ein Mass für die Laufzeit des Tones und kann in Temperatur umgerechnet werden. Da der Einsatz dieser in Erprobung stehenden Anlage noch nicht ganz befriedigt, sei nicht näher darauf eingetreten.

7.3 Die Feuchtemessung

Als genaueste Methode zur Ermittlung des totalen Wassergehaltes wird ein Absaugen von Kanalluft unter praktisch augenblicklichem Verdampfen der Tropfen betrachtet. Die dazu verwendete spezielle Sonde (siehe Figur 5) ist heizbar ausgeführt und erlaubt es, durch Einbau von Druckmeßstellen an deren Innen- und Aussenwand eine zur Kanalgeschwindigkeit passende Absaugeschwindigkeit zu wählen. Abgesaugt wird mittels einer Vakuumpumpe. Vor derselben befindet sich ein Absorptionsgefäss mit Phosphorpentoxyd. Dieses nimmt allen Wasserdampf auf, so dass sich bei Kenntnis der durchgesetzten Luftmenge der totale Wassergehalt pro Kubikmeter wägen und errechnen lässt.

Bei Kenntnis der Lufttemperatur ist es weiter möglich, unter Annahme einer Wasserdampfsättigung der Kanalluft auf den freien Wassergehalt zu schliessen.

7.4 Die Messung der Luftgeschwindigkeit

Die Geschwindigkeitsmessung, insbesondere ihre Eichung, erfolgt normalerweise mit Prandtl-Rohren. Diese sind aber bei vereisenden Bedingungen nur zu Punktmessungen zu verwenden, währenddem zur Ermittlung laufender Daten der Druckabfall an den Enden des vor der Meßstelle sich befindenden Effusors beigezogen wird. Die Vereisung dieser Stellen ist normalerweise stark reduziert. Es muss aber darauf verwiesen werden, dass infolge von Querschnittsveränderungen durch Eisansatz hin und wieder Eichpunkte mit dem Prandtl-Rohr eingemessen werden müssen. Als Meßsysteme werden ein Präzisions-Wassermikromanometer sowie zwei ebenso genaue Druckwandler mit elektrischer Anzeige verwendet.

7.5 Die Eiskernbildungszählung

Die Aufnahme der Eiskernbildungskerncharakteristik der Kanalluft wird eher nur summarisch vorgenommen. Es ist vorläufig vorgesehen, dass als Fremdkerne nur Silberjodidpartikeln verwendet werden sollen, deren Konzentration Null, wenig (100/l Luft) oder viel (10^5 /l) betragen soll. Die Messung geschieht nach der bereits früher beschriebenen Methode [13], wobei noch erwähnt werden könnte, dass die Proben der zu untersuchenden Kanalluft ebenfalls über die Feuchtesonde abgezapft werden.

Wenn auch verschiedene, hier in Abschnitt 7 beschriebene Messmethoden noch nicht befriedigen, so ist doch zu erwarten, dass im Laufe der Experimente eine weitere Entwicklung zu leistungsfähigeren Apparaten stattfindet.

Mit dem Hagelversuchskanal wurden bereits Vereisungsversuche vorgenommen. Die ersten Experimente zeigten dabei, dass die Anlage den gestellten Anforderungen im grossen und ganzen genügt und dass durch deren Einsatz tatsächlich erwartet werden darf, die Kenntnis über die Hagelbildung merklich erweitern zu können.

8. Nachwort

Der Hagelversuchskanal wurde im Rahmen des Versuchsprogrammes der Eidgenössischen Kommission zum Studium der Hagelbildung und der Hagelabwehr erbaut. Ihrem Präsidenten, Herrn Professor Dr. R. SÄNGER, bin ich verpflichtet für seinen Einsatz zur Verwirklichung des Projektes; Herrn Professor Dr. J. ACKERET möchte ich für seine stete Hilfsbereitschaft und die wertvollen Ratschläge herzlich danken.

Erwähnt sei an dieser Stelle auch die Mithilfe von Herrn Dr. H. SPRENGER vom Aerodynamischen Institut der ETH sowie von Herrn Dr. F. FURRER vom Institut für Hochfrequenztechnik der ETH.

Zum Gelingen des Projektes haben durch ihren grossen Einsatz auch die Firmen Gebrüder Sulzer AG, Winterthur (ihr verdanken wir auch die Unterlagen zu den Figuren 1, 2 und 4); Camille Bauer AG, Basel; und Sprecher & Schuh AG, Aarau, beigetragen. Ihnen wie auch den andern Firmen, die kleinere Aufträge ausführten – es seien dabei erwähnt Trion AG, Zürich; CIBA, Basel; Chemische Werke Neuallschwil; E. und H. Huber AG, Pfäffikon; J. Huber AG, Würenlos; Sauter AG, Basel; H. Siegrist & Co., Winterthur; Elcalor AG, Aarau –, gebührt für die tadellose Arbeit Anerkennung.

Zu grösstem Dank bin ich jedoch meinem Chef, Herrn Dr. M. DE QUERVAIN, verpflichtet, der die beschriebenen Arbeiten leitete und in allen Phasen der Planung und des Aufbaues wesentliches zur Abklärung der einzelnen Probleme beigetragen hat. Gedenken möchte ich auch meiner beiden Mitarbeiter, Herrn F. PETER und Herrn P. RÄSS, die tatkräftig bei den experimentellen Vorarbeiten und der Montage des Kanals mitwirkten.

Der Bau des Hagelversuchskanals wurde ermöglicht, indem der Schweizerische Nationalfonds die benötigten bedeutenden Kredite bereitstellte; das Laboratorium wurde durch die Abteilung für Landwirtschaft des Eidgenössischen Volkswirtschaftsdepartements finanziert. Der Eidgenössischen Inspektion für Forstwesen, Jagd und Fischerei sei bei dieser Gelegenheit dafür gedankt, dass sie die Aufnahme der Hagelforschung in das Arbeitsgebiet des Schneeforschungsinstitutes ermöglicht hat.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] W. TRABERT, Met. Z. 10, 433 (1899).
- [2] T. E. W. SCHUMANN, Quart. J. R. met. Soc. 64, 3 (1938).
- [3] E. G. BILHAM und E. F. RELF, Quart. J. R. met. Soc. 63, 149 (1937).

- [4] D. S. FOSTER und F. C. BATES, Bull. Amer. met. Soc. 37, 135 (1956).
- [5] B. J. MASON, *The Physics of Clouds* (1957).
- [6] F. H. LUDLAM, Nubila 1, 12 (1958).
- [7] R. LIST und M. DE QUERVAIN, Z. angew. Math. Phys. 4, 3 (1953).
- [8] R. LIST, Z. angew. Math. Phys. 9a, 180 (1958).
- [9] R. LIST, Z. angew. Math. Phys. 9a, 217 (1958).
- [10] A. STEIGER und H. SPRENGER, *Bericht über die aerodynamischen Untersuchungen betreffend Ausbildung der Meßstrecke des Hagel-Windkanals* (Institut für Aerodynamik der ETH, 1954; nicht publiziert).
- [11] D. C. BLANCHARD, General Electric Report No. RL 285 (1949).
- [12] R. LIST, *Bericht über die auf Weissfluhjoch ausgeführten Vorarbeiten für die Konstruktion eines Hagelversuchskanals* (1954; nicht publiziert).
- [13] R. LIST, Helv. Phys. Acta 29, 424 (1956).
- [14] W. E. RANZ und W. R. MARSHALL, Chem. Eng. Progr. 48, 141 (1952).
- [15] W. E. RANZ und W. R. MARSHALL, Chem. Eng. Progr. 48, 173 (1952).
- [16] R. LIST, Z. angew. Math. Phys. 10, 143 (1959).
- [17] H. R. PRUPPACHER und R. SÄNGER, Z. angew. Math. Phys. 6, 407 (1955).
- [18] H. R. PRUPPACHER und R. SÄNGER, Z. angew. Math. Phys. 6, 485 (1955).

Summary

In the past the problem of fundamental research into hail formations has been dealt with in a more or less theoretical fashion on the basis of meteorological information. The attempt will now be made to reach an interpretation of how hail forms by an experimental physical method. To this end a wind tunnel has been built in which experiments can be conducted for studying the growth of suspended or floating particles of ice in terms of environmental conditions. Subsequent comparison with natural hailstones suggests that conclusions can be drawn as to how these have come into being and that eventually an explanation of hail formation can be given which comes closer to reality.

For the reproduction of atmospheric conditions in the laboratory the individual parameters of the experiment have been specified as follows: Temperature down to -40°C ; maximum free water content in the air 10 g/m^3 ; size of drops between 1 and $200\text{ }\mu$; highest wind speed 25 m/s ; concentration of ice-forming nuclei of various substances: none, single, multiple. Although variations in pressure have not been employed, the laboratory conditions may be transformed to those of the open atmosphere by using the rules of similarity.

The construction of the hail tunnel (Figure 1) may be described as follows. The blowing apparatus 1 drives the air into a temperature adjuster and filter unit 2; details with an air-cooler 2, 19 kW heater 3 and electrostatic filter 4 are shown in Figure 2. After these units the air is led into a vertical section where it is made humid and homogeneous. The ice-forming nuclei are also added at this point. Immediately next to this comes the actual measuring section 4 where the growth of a suspended or floating object is to be studied. The remaining parts of the tunnel 5 serve only to return the circulated air to the ventilator. Figure 3 shows the refrigerating compressor, Figure 6 the control unit. The arrangement of the drop-producing installations, such as the steam boiler 1, air-water compressor 4, and rotor atomizer 3, can be understood from the plan of the laboratory in Figure 4. Figure 5 shows the construction of the measuring section while Figure 7 illustrates how the apparatus of the control unit is set up. For

more detailed account of the way individual parts (particularly the control mechanism) of the equipment work, the reader is referred to section 4.

The performance of the hail tunnel has been measured as follows: Assuming in accordance with the values given in Figures 8 and 9 that injected humidity and added heat are interchangeable, various *stationary operating conditions* in terms of heat production were allowed to develop with the refrigerating compressor running at maximum performance. The maximum performance curves measured in this way can be derived from Figure 10 for the compressor revolution numbers I and II and different air speeds. These curves represent the effective energy available for the experiment as a function of the air-cooler temperature t_V , since all losses from the tunnel are involved in the readings and therefore included in the final result. On the basis of formula (8) and Figures 11 and 12 the fundamental temperature for the output of the refrigeration plant t_F can be correlated with the temperature in the measuring section t_M . The curve L_{Kg} gives in every case the maximum work of the compressor as a function of t_V .

If we convert corresponding energy values and air-cooler temperatures into humidity and measuring-section temperature, the correlations which result are shown in Figure 13. The specification of a free water content of 10 g/m^3 is in fact exceeded over a wide range of temperatures.

Since variations of the different factors play an important part in the imitation of hail-forming atmospheric conditions, the behaviour of the hail tunnel was also recorded during *unstable operation*. Figures 14, 15 and 16 show corresponding sequences in the governing temperature of the air cooler. Even more interesting, however, is the influence of the heat expenditure while the temperature of the vaporizer is kept constant. With a heat input of 18 kW there resulted, depending on the air speed, increases of temperature in the measuring section, as recorded for different time intervals in Figure 17. The observed time dependence is due to the inertia of the tunnel.

As cooling-down takes as long as warming-up, we can calculate even forced periodic temperature fluctuations. Figure 18 gives an example of this for a period lasting 4 min and for air speeds of 10 and 25 m/s. At higher temperatures the largest fluctuation in temperature which can be produced is dependent only on the air speed; at lower temperatures it is limited by the capacity of the compressor. If, however, humidity is introduced under these latter conditions – and this will be the case in the main experiments – then the total energy added increases; adjustment of the cold compressor can only take place at higher temperatures, so that the limiting stability curves are correspondingly displaced. The extent of this displacement for various amounts of additional energy due to humidity Q_F is shown in Figure 18.

The plant was constructed as part of the research programme of the Swiss Federal Commission for the Study of Hail Formation and Prevention. The results already obtained make it possible to expect that the tunnel will lead to a substantial increase in our knowledge of hail formation.

(Eingegangen: 5. Dezember 1958.)

Bemerkung zur Berechnung spezieller Potenzsummen

VON RUDOLF HOFMANN, Berlin, Deutschland¹⁾

Die einschlägigen neueren²⁾ Formeltafeln und Tabellen enthalten unter anderem, soweit dem Verfasser bekannt, nur die Potenzsummen der natürlichen Zahlen in allgemeiner Form. Die Summen der Potenzen der trigonometrischen Funktionen werden jedoch nur für ganzzahlige Exponenten $M = 1, 2, 3, 4$ angegeben. Es erscheint daher der Hinweis angebracht, dass sich die entsprechenden allgemeinen Summenformeln explizit angeben lassen. Dabei wird die Methode zu ihrer Berechnung nur gestreift.

Einen Beitrag zur Aufsummierung unendlicher Reihen in geschlossener Form mit Hilfe der Laplace-Transformation hat WHEELON³⁾ geliefert. Dabei wird davon ausgegangen, dass die Summanden der vorgegebenen Reihe Bildfunktionen von bekannten Originalfunktionen sind.

Es liegt nun nahe, auch den umgekehrten Weg zur Berechnung von Reihen einzuschlagen, und zwar dann, wenn die Summanden der Reihe Originalfunktionen bekannter Funktionen sind, die durch die komplexe Umkehrformel der Laplace-Transformation erhalten werden.

Sei nämlich

$$S = \sum_k A(k) \quad (1)$$

gegeben⁴⁾, ferner $A(k)$ in der Form $B(k) \cdot C(k)$ und

$$B(k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} b(s) e^{sk} ds \quad (2)$$

durch die komplexe Umkehrformel der Laplace-Transformation darstellbar, dann geht (1) über in

$$S = \sum_k C(k) \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} b(s) e^{sk} ds. \quad (3)$$

Das Integral ist dabei über eine Vertikale mit der Abszisse c in der Konvergenzhalbebene von $b(s)$ zu erstrecken derart, dass alle Singularitäten von $b(s)$ links der Vertikalen liegen. In allen Fällen, in denen es möglich ist, die Reihenfolge von Summe und Integral zu vertauschen, was zum Beispiel bei endlichen Reihen

¹⁾ Osram Studiengesellschaft.

²⁾ I. M. RYSHIK und I. S. GRADSTEIN, *Summen-, Produkt- und Integraltafeln* (Berlin 1957).

³⁾ A. D. WHEELON, J. appl. Phys. 25, 113 (1954).

⁴⁾ Die Summanden seien als Funktionen der nur für ganzzahlige Werte vorkommenden Grösse k aufgefasst.

stets der Fall ist, geht dann (3) über in

$$S = \frac{1}{2 \pi i} \int_{c-i \infty}^{c+i \infty} b(s) \varphi(s) \, ds \tag{4}$$

mit

$$\varphi(s) = \sum_k C(k) e^{ks}.$$

Damit ist für die Reihe S – unter den oben angegebenen Voraussetzungen – eine geschlossene Darstellung gefunden.

Im folgenden soll die Methode anhand einiger Beispiele demonstriert werden; es werden mit ihrer Hilfe die Summen der Potenzen der trigonometrischen Funktionen

$$\sum_{k=1}^n \sin^M k \, x \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^n \cos^M k \, x$$

sowie die alternierende Potenzsumme der natürlichen Zahlen

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k k^M$$

für beliebige ganze Potenzen $M > 0$ hergeleitet.

1. Mittels der Korrespondenz⁵⁾

$$\sin^{2N} x \, t \circ \bullet = \frac{(2N)! \, x^{2N}}{s \prod_{k=1}^N [s^2 + (2kx)^2]} \quad (N = 1, 2, \dots)$$

folgt für die Reihe $\sum_{k=1}^n \sin^{2N} k \, x$ gemäss (4)

$$\sum_{k=1}^n \sin^{2N} k \, x = \frac{(2N)! \, x^{2N}}{2 \pi i} \int_{c-i \infty}^{c+i \infty} \frac{(e^{ns} - 1) e^s}{(e^s - 1) s \prod_{k=1}^N [s^2 + (2kx)^2]} \, ds. \tag{5}$$

(5) lässt sich leicht auswerten. Die Partialbruchzerlegung

$$\frac{(2N)! \, x^{2N}}{s \prod_{k=1}^N [s^2 + (2kx)^2]} = \frac{1}{4^N} \left\{ \binom{2N}{N} \frac{1}{s} + 2 \sum_{k=1}^N (-1)^k \binom{2N}{N-k} \frac{s}{[s^2 + (2kx)^2]} \right\}$$

und die Anwendung des Residuensatzes liefert

$$\sum_{k=1}^n \sin^{2N} k \, x = \frac{1}{4^N} \left\{ \binom{2N}{N} \psi(0) + \sum_{k=1}^N (-1)^k \binom{2N}{N-k} [\psi(2kxi) + \psi(-2kxi)] \right\} \tag{6}$$

⁵⁾ Die Bezeichnungsweise ist G. DOETSCH, *Tabellen zur Laplace-Transformation* (Berlin 1947), entnommen.

mit

$$\psi(s) = \frac{(e^{ns} - 1)}{(e^s - 1)} e^s.$$

Es ist

$$\psi(s) + \psi(-s) = -1 + \frac{\sinh(2n+1) \frac{s}{2}}{\sinh \frac{s}{2}},$$

$$\psi(s) - \psi(-s) = 2 \frac{\sinh(n+1) \frac{s}{2} \sinh n \frac{s}{2}}{\sinh \frac{s}{2}}, \quad \psi(0) = n.$$

Damit folgt aus (6)

$$\sum_{k=1}^n \sin^{2N} kx = \frac{1}{2^{2N+1}} \left\{ (2n+1) \binom{2N}{N} + 2 \sum_{k=1}^N (-1)^k \binom{2N}{N-k} \frac{\sin k(2n+1)x}{\sin kx} \right\} \quad (7)$$

und

$$2 \sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{2N}{N-k} = \binom{2N}{N}. \quad (8)$$

Auf dieselbe Weise bekommt man wegen

$$\sin^{2N+1} xt \circ - \bullet \frac{1}{4N} \sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{2N+1}{N-k} \frac{(2k+1)x}{[s^2 + (2k+1)^2 x^2]}, \quad N = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sin^{2N+1} kx &= \frac{1}{4N} \sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{2N+1}{N-k} \\ &\times \frac{\sin(2k+1)(n+1) \frac{x}{2} \sin(2k+1)n \frac{x}{2}}{\sin(2k+1) \frac{x}{2}}, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

wegen

$$\cos^{2N} xt \circ - \bullet \frac{1}{4N} \left\{ \binom{2N}{N} \frac{1}{s} + 2 \sum_{k=1}^N \binom{2N}{N-k} \frac{s}{[s^2 + (2k)^2 x^2]} \right\}, \quad N = 1, 2, \dots,$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n \cos^{2N} kx &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2N+1}} \\ &\times \left\{ (2n+1) \binom{2N}{N} + 2 \sum_{k=1}^N \binom{2N}{N-k} \frac{\sin k(2n+1)x}{\sin kx} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

mit

$$2 \sum_{k=0}^N \binom{2N}{N-k} = 4N + \binom{2N}{N}, \quad (11)$$

und wegen

$$\cos^{2N+1} x \sim \frac{1}{4^N} \sum_{k=0}^N \binom{2N+1}{N-k} \frac{s}{[s^2 + (2k+1)^2 x^2]}, \quad N = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\sum_{k=1}^n \cos^{2N+1} kx = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2N+1}} \sum_{k=0}^N \binom{2N+1}{N-k} \frac{\sin(2k+1) \frac{x}{2} \sin(2n+1) \frac{x}{2}}{\sin(2k+1) \frac{x}{2}} \quad (12)$$

mit

$$\sum_0^N \binom{2N+1}{N-k} = 4^N. \quad (13)$$

2. Für die alternierende Reihe

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k k^N$$

folgt wegen

$$t^N \sim \frac{N!}{s^{N+1}}, \quad N = 0, 1, 2, \dots$$

und

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k e^{ks} = \frac{[(-1)^n e^{ns} - 1]}{e^s + 1} e^s$$

aus (4) die Beziehung

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k k^N = \frac{N!}{2\pi i} \oint_K \frac{[(-1)^n e^{ns} - 1] e^s}{(e^s + 1) s^{N+1}} ds, \quad (14)$$

da wegen der für N gemachten Voraussetzung der Integrationsweg auf einen Kreis K um den Nullpunkt verlegt werden kann. Zur Auswertung von (14) wird

$$\frac{[(-1)^n e^{ns} - 1]}{e^s + 1} e^s = h(s)$$

entwickelt. Es sei

$$\frac{1}{e^s + 1} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{A_p}{p!} s^p,$$

wobei die A_p der Rekursionsformel

$$A_0 = \frac{1}{2}; \quad A_p + \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} A_j = 0, \quad p = 1, 2, \dots,$$

genügen oder aus der Determinantendarstellung

$$A_p = \frac{(-1)^p}{2^{p+1}} \left\| \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 0 & . & \dots & . & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & \dots & . & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & \dots & . & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{p-1}{0} & \binom{p-1}{1} & . & . & \dots & \binom{p-1}{p-2} & 2 \\ \binom{p}{0} & \binom{p}{1} & . & . & \dots & \binom{p}{p-2} & \binom{p}{p-1} \end{array} \right\| \quad (15)$$

sehr einfach zu ermitteln sind. Die A_p dürfen somit als bekannt vorausgesetzt werden. Mithin wird

$$h(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s^k}{k!} \left(\sum_{\lambda=0}^k \binom{k}{\lambda} A_{\lambda} [(-1)^n (n+1)^{k-\lambda} - 1] \right),$$

so dass sich schliesslich aus (14)

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k k^N = A_N + (-1)^n \sum_{k=0}^N \binom{N}{k} A_k (n+1)^{N-k}, \quad N = 1, 2, \dots \quad (16)$$

ergibt.

Summary

Some series can be computed easily if the terms are original functions of known Laplace transforms. The method is briefly outlined, as example the series

$$\sum_{k=1}^n \sin^M kx, \quad \sum_{k=1}^n \cos^M kx \quad \text{and} \quad \sum_{k=1}^n (-1)^k k^M$$

are computed in closed forms for integer exponents $M > 0$.

(Eingegangen: 9. Januar 1959.)

Minimum Weight Design of Circular Plates Under Arbitrary Loading¹⁾

By WILLIAM PRAGER²⁾ and RICHARD T. SHIELD³⁾, Providence, R. I., USA.

To Professor F. K. G. ODQVIST on the occasion of his 60th anniversary

1. Introduction

The direct design procedures developed by DRUCKER and SHIELD [1, 2]⁴⁾ have been used recently [3] to obtain the minimum weight design of circular plates under rotationally symmetric pressure distributions. The sandwich plate and the solid or homogeneous plate were considered and designs for both simply supported and built-in edge conditions were derived. As an extension of this work, the minimum weight design is obtained in the following for a circular sandwich plate loaded by an *arbitrary* distribution of pressure. The deformation modes used to obtain the designs are the same as those used in [3] for rotationally symmetric pressure distributions.

2. Definition of the Problem

The ideal sandwich plate is composed of a core of constant thickness H between two identical face sheets of variable thickness h , where $h \ll H$. The core carries shear stress only while the face sheets carry direct stresses and so provide the bending moment across a section. The material of the face sheets is assumed to be elastic-perfectly plastic and to obey TRESCA's yield condition, with yield stress σ_0 in tension or compression. It is convenient to represent the principal bending moments M_1, M_2 at a generic point of the plate by a point with rectangular coordinates (M_1, M_2) (see Figure 1). With TRESCA's yield criterion, the stress point must then be within or on the hexagon in the figure [4], the maximum bending moment M_0 being given by

$$M_0 = \sigma_0 H h. \quad (1)$$

For a point on the hexagon, plastic bending of the plate can occur. The principal curvature rates κ_1, κ_2 associated with a mode of plastic deformation can be represented in Figure 1 by a vector with components proportional to κ_1, κ_2 attached to the stress point in question. The flow rule requires the curvature rate vector to be normal to the hexagon for points on a side, and at the corners of the hexagon the vector must lie in the fan bounded by normals to adjacent sides. The rate of dissipation of energy D_A per unit area of the middle surface due to plastic

¹⁾ The results presented in this paper were obtained in the course of research sponsored by the Office of Ordnance Research, Department of the Army, under Contract No. DA-19-020-ORD-4564.

²⁾ Professor of Applied Mechanics, Brown University, Providence 12, Rhode Island.

³⁾ Associate Professor of Applied Mathematics, Brown University, Providence 12, Rhode Island.

⁴⁾ Numbers in brackets refer to References, page 425.

action is given by

$$D_A = M_1 \kappa_1 + M_2 \kappa_2 \quad (2)$$

and is uniquely determined by the curvature rates κ_1, κ_2 .

It is required to determine the thickness h of the face sheets so that the plate can just carry a given distribution of pressure and so that minimum weight of material is involved. The material is assumed to be homogeneous and minimum weight coincides with minimum volume. The minimum weight design is achieved

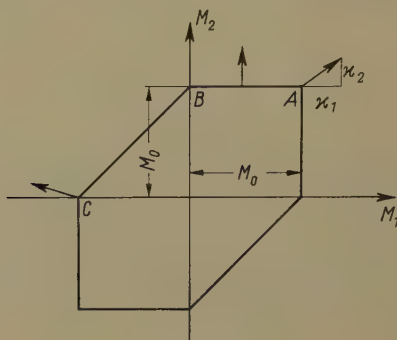


Figure 1
Yield condition.

by a plate designed to collapse in a mode for which the condition

$$\frac{D_A}{h} = \text{const} \quad (3)$$

is satisfied over the plate [1, 2], if body forces are neglected. Condition (3) is a condition on the rate of deflection w of the middle surface of the plate and the thickness h does not enter into condition (3) because of the linear dependence of D_A on h . To this extent, the condition is independent of the pressure distribution over the plate but the form of the condition depends upon the position of the stress point on the hexagon, which in turn is influenced by the loading.

For a circular plate with conditions of simple support or built-in support at the edge of the plate, the deflection mode w satisfying (3) is rotationally symmetric. With polar coordinates (r, θ) , the edge of the plate being $r = R$, the curvature rate $\kappa_{r\theta}$ is zero and isotropy then requires the bending moment $M_{r\theta}$ to be zero. For equilibrium, the bending moments M_r, M_θ satisfy the equation

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r M_r) - \frac{\partial M_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 M_\theta}{\partial \theta^2} = -r p, \quad (4)$$

where $p = p(r, \theta)$ is the pressure over the plate. For definiteness, the plate is taken to be horizontal. Positive values of M_r, M_θ stress the lower surface of the plate in tension and the pressure is applied to the upper surface. The shear forces Q_r, Q_θ are given by

$$Q_r = \frac{\partial M_r}{\partial r} + \frac{1}{r} (M_r - M_\theta), \quad Q_\theta = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta}. \quad (5)$$

3. Simply Supported Plate

When the edge $r = R$ of the plate is simply supported, the minimum weight design is obtained by assuming that the whole of the plate is stressed to state A of Figure 1. The deflection rate w (measured in the downwards direction), associated with point A and satisfying (3), and the condition $w = 0$ at $r = R$, is given by [3]

$$w = \alpha (R^2 - r^2), \quad (6)$$

where α is a positive constant. The bending moments M_r, M_θ are both equal to the maximum moment M_0 and substitution in the equation of equilibrium gives

$$\frac{\partial^2 M_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial M_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 M_0}{\partial \theta^2} = -p. \quad (7)$$

This equation and the condition $M_0 = 0$ at $r = R$ are sufficient to determine M_0 over the plate.

For a concentrated load P at the point (ϱ, φ) , the solution of (7) satisfying $M_0 = 0$ at $r = R$ is

$$\sigma_0 H h = M_0 = \frac{P}{2\pi} \ln \left[\frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{\varrho}{R} \right], \quad (8)$$

where r_1, r_2 are the distances of the point (r, θ) from the point (ϱ, φ) and its inverse with respect to the circle $r = R$, that is the point $(R^2/\varrho, \varphi)$, respectively:

$$r_1^2 = \varrho^2 + r^2 - 2\varrho r \cos(\theta - \varphi), \quad r_2^2 = \frac{R^4}{\varrho^2} + r^2 - 2\frac{R^2}{\varrho} r \cos(\theta - \varphi). \quad (9)$$

The solution for a distributed load $p(r, \theta)$ can be obtained from the fundamental integral (8) by integration:

$$\sigma_0 H h = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R p(\varrho, \varphi) \ln \left\{ \frac{R^2 + r^2 \varrho^2/R^2 - 2\varrho r \cos(\theta - \varphi)}{\varrho^2 + r^2 - 2\varrho r \cos(\theta - \varphi)} \right\} \varrho d\varrho d\varphi. \quad (10)$$

4. Built-in Plate

For the plate with a built-in edge, stress point C of Figure 1 applies near the edge of the plate and stress point A applies in the center of the plate. The velocity field

$$w = \alpha \left(\frac{3}{2} a^2 - r^2 \right) \quad (0 \leq r \leq a), \quad w = 2\alpha (R - r)^2 \quad (a \leq r \leq R), \quad (11)$$

where $a = 2/3 R$, satisfies the condition (3) over the plate, together with the conditions $w = \partial w / \partial r = 0$ at the clamped edge $r = R$ and w and $\partial w / \partial r$ continuous at $r = a$ [3]. The deformation mode (11) is associated with stress point A for $0 \leq r \leq a$ and stress point C for $a \leq r \leq R$. The moments M_r, M_θ are therefore given by

$$M_r = M_\theta = M_0 \quad (0 \leq r < a), \quad M_r = -M_0, \quad M_\theta = 0 \quad (a < r \leq R). \quad (12)$$

For equilibrium, it follows from equations (4) and (12) that M_0 must satisfy equation (7) for $0 \leq r < a$, and for $a < r \leq R$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r M_0) = r p. \quad (13)$$

At the junction $r = a$, M_r is continuous so that $M_0 = 0$ at $r = a$. In addition, the shear force Q_r must be continuous at $r = a$ (in the absence of concentrated load) and this requires $|\partial M_0/\partial r|$ to be continuous. Equation (7) and the condition $M_0 = 0$ at $r = a$ are sufficient to determine M_0 for $0 \leq r < a$. Equation (13) and the condition $M_0 = 0$ at $r = a$ together with the known derivative $(\partial M_0/\partial r)_{r=a}$ are then sufficient to determine M_0 for $a < r < R$.

We first consider a concentrated load P at a point (ϱ, φ) within the circle $r = a$, so that $\varrho < a$. As in the previous section, the solution of equation (7) with $p = 0$ and having the appropriate singularity at (ϱ, φ) and $M_0 = 0$ at $r = a$ is

$$\sigma_0 H h = M_0 = \frac{P}{2\pi} \ln \left[\frac{r_2}{r_1} \cdot \frac{\varrho}{a} \right] \quad (r \leq a), \quad (14)$$

where now

$$r_1^2 = \varrho^2 + r^2 - 2\varrho r \cos(\theta - \varphi), \quad r_2^2 = \frac{a^4}{\varrho^2} + r^2 - 2\frac{a^2}{\varrho} r \cos(\theta - \varphi). \quad (15)$$

For $r \geq a$, M_0 satisfies equation (13) with $p = 0$ and as $M_0 = 0$ at $r = a$, we obtain

$$M_0 = f(\theta) \left(1 - \frac{a}{r} \right) \quad (a \leq r \leq R).$$

The positive function $f(\theta)$ entering into this equation is determined by the condition that the magnitude of the derivative $\partial M_0/\partial r$ is continuous at $r = a$. This requires

$$\sigma_0 H h = M_0 = \frac{P}{2\pi} \cdot \frac{a^2 - \varrho^2}{a^2 + \varrho^2 - 2\varrho a \cos(\theta - \varphi)} \left(1 - \frac{a}{r} \right) \quad (a \leq r \leq R). \quad (16)$$

The design for a load $p(r, \theta)$ distributed inside the circle $r = a$ and zero load over the annulus $a \leq r \leq R$ can be obtained from the design (14), (16) by integration:

$$\sigma_0 H h = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^a p(\varrho, \varphi) \ln \left\{ \frac{a^2 + r^2 \varrho^2/a^2 - 2\varrho r \cos(\theta - \varphi)}{\varrho^2 + r^2 - 2\varrho r \cos(\theta - \varphi)} \right\} \varrho d\varrho d\varphi \quad (17)$$

for $r \leq a$, and for $a \leq r \leq R$

$$\sigma_0 h H = \frac{1}{2\pi} \left(1 - \frac{a}{r} \right) \int_0^{2\pi} \int_0^a p(\varrho, \varphi) \frac{a^2 - \varrho^2}{a^2 + \varrho^2 - 2\varrho a \cos(\theta - \varphi)} \varrho d\varrho d\varphi. \quad (18)$$

When there is no load inside the circle $r = a$, M_0 is harmonic for $r \leq a$ and since $M_0 = 0$ at $r = a$, it follows that M_0 is zero identically inside $r = a$. We assume that the plate is loaded in the annular region by a line load $\tilde{\omega}$ per unit length along the arc element $\varphi \leq \theta \leq \varphi + \Delta\theta$ of the circle $r = \varrho$, where $\varrho > a$ (Figure 2). The total load on the plate is then $P = \tilde{\omega} \varrho \Delta\theta$. Because $p = 0$ in equation (13) except for $r = \varrho$, $\varphi \leq \theta \leq \varphi + \Delta\theta$, and also $M_0 = \partial M_0/\partial r = 0$ at $r = a$, it follows from equation (13) that M_0 is zero except in the truncated sector $\varrho \leq r \leq R$, $\varphi \leq \theta \leq \varphi + \Delta\theta$, shown shaded in Figure 2. Thus the load is carried by a 'cantilever' from the point on the support circle $r = R$ nearest to the region of application of the load. In order to determine M_0 in the shaded region, we note that M_0 is zero at $r = \varrho$ and the shear force Q_r , and therefore $\partial M_0/\partial r$, has a

discontinuity of amount $\tilde{\omega}$ across the loaded element of arc. The result is

$$\sigma_0 H h = M_0 = \varrho \tilde{\omega} \left(1 - \frac{\varrho}{r}\right) \quad (19)$$

in the region $\varrho \leq r \leq R$, $\varphi \leq \theta \leq \varphi + \Delta\theta$.

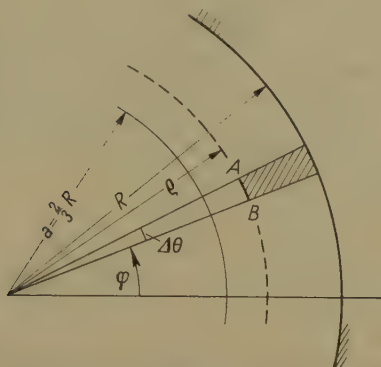


Figure 2

Line load on arc element AB .

Integration of the design (19) leads to the design for a distributed load $p(r, \theta)$ which is zero inside the circle $r = a$:

$$\sigma_0 H h = \int_a^r p(\varrho, \theta) \varrho \left(1 - \frac{\varrho}{r}\right) d\varrho \quad (20)$$

for $a \leq r \leq R$ and the thickness h is zero for $r \leq a$. The upper limit of integration in equation (20) is r because the pressure $p(\varrho, \theta)$ at the point (ϱ, θ) adds material only to points (r, θ) for which $\varrho \leq r$.

When the pressure distribution $p(r, \theta)$ is non-zero in both $r \leq a$ and $a \leq r \leq R$, the thickness distributions given by equations (17), (18) and equation (20) are added.

REFERENCES

- [1] D. C. DRUCKER and R. T. SHIELD, *Design for Minimum Weight*, Proceedings of the 9th International Congress of Applied Mechanics (Brussels 1956).
- [2] D. C. DRUCKER and R. T. SHIELD, *Bounds on Minimum Weight Design*, Quart. appl. Math. 15, 269-281 (1957).
- [3] E. T. ONAT, W. SCHUMANN and R. T. SHIELD, *Design of Circular Plates for Minimum Weight*, J. appl. Math. Phys. (ZAMP) 8, 485-499 (1957).
- [4] H. G. HOPKINS and W. PRAGER, *The Load-Carrying Capacities of Circular Plates*, J. Mech. Phys. Solids 2, 1-13 (1953).

Zusammenfassung

Das Dimensionierungsverfahren von DRUCKER und SHIELD [1, 2] wurde kürzlich auf die Dimensionierung rotationssymmetrisch belasteter Kreisplatten für Mindestgewicht angewandt [3], wobei sowohl gelenkig gestützte als auch eingespannte Sandwichplatten betrachtet wurden. In der vorliegenden Arbeit werden diese Untersuchungen auf kreisförmige Sandwichplatten unter nicht rotationssymmetrischer Belastung ausgedehnt. Es zeigt sich, dass auch für solche Lasten der Dimensionierung für Mindestgewicht diejenigen Verformungszustände zugrunde gelegt werden können, welche schon zur Lösung der entsprechenden Aufgabe bei rotationssymmetrischer Belastung konstruiert wurden. Für Belastung einer gelenkig gestützten oder eingespannten Kreisplatte durch eine Einzellast mit beliebigem Angriffspunkt werden explizite Dimensionierungsformeln gewonnen, für beliebig verteilte Belastung werden Integraldarstellungen der optimalen Dimensionierung gegeben.

(Received: February 4, 1959.)

A Note on Addition Theorems for Mathieu Functions

By K. SÆRMARK, Copenhagen, Denmark¹⁾

It is the purpose of this note to point out the existence of an addition theorem for Mathieu functions besides the one given by MEIXNER and SCHÄFKE [1–3]²⁾. The latter states – in the notation of [1] – the following. We consider two elliptical cylinder coordinate systems A and B :

$$A: x_1 \pm i x_2 = c \cosh(z \pm i t);$$

$$B: x'_1 \pm i x'_2 = c_0 \cosh(z_0 \pm i t_0),$$

connected by

$$c \cosh(z \pm i t) = l e^{\pm i u} + c_0 e^{\pm i v} \cosh(z_0 \pm i t_0).$$

(We consider only real, positive values of c, c_0, z, z_0, t and t_0 ; see figure.) Let z_1 and z_2 be the elliptical coordinates – in the A -system – of the focal points of the B -system and z_{max} the largest one of z_1, z_2 , then

$$\left. \begin{aligned} M_p^{(j)}(z_0; h_0) me_p(t_0; h_0^2) &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} A_s M_{p+s}^{(j)}(z; h) me_{p+s}(t; h^2) \\ (j &= 1, 2, 3 \text{ or } 4; p = \text{integer} \geq 0) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

will be valid in the region

$$z > z_{max} \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

In (1) $M_p^{(j)}(z; h) me_p(t; h^2)$ and $M_p^{(j)}(z_0; h_0) me_p(t_0; h_0^2)$ are solutions of the wave-

¹⁾ Technical University of Denmark, Physics Department.

²⁾ Numbers in brackets refer to References, page 428.

cients in the expansions of the periodic Mathieu functions:

$$me_q(t; h^2) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} C_{2l}^q(h^2) e^{i(q+2l)t}.$$

By means of a well-known addition theorem for the cylinder functions:

$$(-1)^p Z_p^{(j)}(k r) e^{-i p \vartheta} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{i s \psi} J_s(k R) Z_{-p+s}^{(j)}(k l),$$

valid for $R < l$, and (2) and (3) one then gets, observing that $\theta = \psi + u$ and $\alpha + \vartheta = \pi + u - v$,

$$M_m^{(j)}(z_0; h_0) me_m(t_0; h_0^2) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} B_{q,m}^{(j)} M_q^{(1)}(z; h) me_q(t; h^2) \quad \left. \vphantom{\sum_{q=-\infty}^{\infty}} \right\} \quad (4)$$

$$(j = 1, 2, 3, 4; m = \text{integer} \geq 0)$$

where

$$B_{q,m}^{(j)} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \{ d'_{q-p,s}(h^2) Z_{p-s}^{(j)}(k l) d_{s-m,m}(h_0^2) \} e^{i(s-p)u} e^{-i s v}.$$

(4) will be valid outside a circle with center at B' and $r = c_0$, but inside the circle with center at A' and $R = l$. This region is shown in the figure.

Comparing the expression for $B_{q,m}^{(j)}$ with the expression given in [1] for A_s in (1), it is interesting to note that the major difference is the occurrence of $Z^{(j)}(k l)$ instead of $J(k l)$. This seems to indicate that a more fundamental derivation than the one given here is possible.

Note Added in Proof: Actually the region of validity of the addition theorem (1) is somewhat larger than stated by MEIXNER and SCHÄFKE. It may be shown that (1) holds in the region *outside* the circle with centre at A' and radius l and the circle with centre at B' and radius c_0 .

REFERENCES

- [1] J. MEIXNER and F. W. SCHÄFKE, *Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen*, 1st ed. (Springer Verlag, Berlin 1954), p. 171–187.
- [2] F. W. SCHÄFKE, *Math. Z.* 58, 436–447 (1953).
- [3] J. MEIXNER, *Math. Nachr.* 3, 14–19 (1949).

Zusammenfassung

Es wird gezeigt, dass ein Additionstheorem für Mathieusche Funktionen – verschieden von dem von MEIXNER und SCHÄFKE gegebenen – existiert.

(Received: December 1, 1958.)

Ergänzung zum Aufsatz: «Der senkrechte Verdichtungsstoss am gekrümmten Profil»¹⁾

Von JÜRGEN ZIEREP, Aachen, Deutschland²⁾

In der angegebenen Veröffentlichung wird das Verhalten eines senkrechten Verdichtungsstosses an einer gekrümmten Wand untersucht. Das Hauptergebnis ist, dass die Stosskrümmung an der Wand unendlich wird. Anschliessend werden einige Folgerungen im Hinblick auf einschlägige Versuchsergebnisse gezogen. Herr RANDALL (Royal Aircraft Establishment, Farnborough) hat mich in dankenswerter Weise darauf hingewiesen, dass die Konsequenzen der mitgeteilten Ergebnisse weiter reichen. Während in meiner Note im wesentlichen nur mit dem Absolutbetrag der Wandkrümmung gearbeitet wird, zeigt es sich nämlich, wenn man das Vorzeichen derselben von Anfang an mitberücksichtigt, dass man zu den folgenden Resultaten gelangt. Mit Hilfe der Darstellung (3.3) für die Stosskurve (jetzt gültig für $\beta_{\Sigma} \geq 0$!)

$$\Sigma = \pm \frac{4}{3} \sqrt{\frac{\sigma}{2} \beta_{\Sigma} H^{3/2}}$$

erkennt man, dass zum Beispiel im Mach-Zahl-Bereich $\sigma(M) > 0$ ein Stoss nur möglich ist, solange $\beta_{\Sigma} > 0$ ist. Dies würde aber heissen, dass sich ein senkrechter Stoss (in diesem Mach-Zahl-Bereich) nur an einem *konkaven* Profil, dagegen nicht an einem *konvexen* Profil ausbilden kann. Dieses Ergebnis ist überraschend. Herr GARABEDIAN (Stanford University, Calif.) wies in einer mündlichen Mitteilung jedoch darauf hin, dass bei diesem Schluss ganz wesentlich eine Stetigkeitsvoraussetzung benutzt wird. Wir haben nämlich in (2.6) angenommen, dass beim Grenzübergang $\eta \rightarrow 0$ $h_1 \beta_{\xi}$ gegen die Wandkrümmung konvergiert. Inwieweit diese Voraussetzung bei dem längs des Stosses durchgeführten Limes $\eta \rightarrow 0$ wirklich erfüllt ist und damit der oben beim konvexen Profil gezogene Schluss bindend ist, bleibt vorerst noch offen. Darüber soll hier später ausführlich berichtet werden. Zum Abschluss wollen wir noch folgende Bemerkung über das zu Beginn der Arbeit erwähnte orthogonale (ξ, η) -Netz machen. Aus dem Text ist unmittelbar ersichtlich, dass dieses Netz in der Note eigentlich gar nicht benötigt wird. Was gemacht wird, ist das Folgende: Die in den Bewegungsgleichungen auftretenden Ableitungen $\partial u / \partial x$, $\partial u / \partial y$, $\partial v / \partial x$, $\partial v / \partial y$ werden lediglich *auf der Stosskurve* in Ableitungen längs des Stosses und senkrecht dazu umgeschrieben. Die Existenz eines krummlinigen orthogonalen Netzes ist hierzu nicht erforderlich. Die Betrachtungen lassen sich genau so im kartesischen (x, y) - bzw. (u, v) -System durchführen, und man kommt zum selben Ergebnis.

(Eingegangen: 2. Oktober 1958.)

¹⁾ Z. angew. Math. Phys. 9b, 764–776 (1958).

²⁾ Institut für theoretische Gasdynamik der DVL.

Frühjahrstagung der Schweizerischen Physikalischen Gesellschaft vom 2. und 3. Mai 1959 in Brugg

Berichte über die Sitzungen für angewandte Physik und Mathematik

Hochempfindlicher Transistorenverstärker mit einem Eingangswiderstand von mehr als 5 M Ω . VON H. JUNG, Zürich¹⁾.

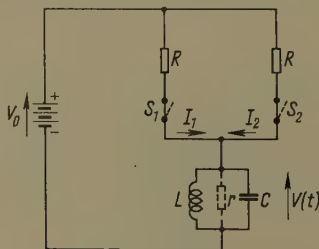
Eine ausführliche Veröffentlichung erfolgt demnächst in der ZAMP.

Koinzidenzschaltung mit Schwingkreis. VON H. GUHL, B. LOBKOWICZ und P. MARMIER, Zürich²⁾.

Wird ein gleichstromdurchflossener Schwingkreis plötzlich aus dem Stromkreis abgeschaltet, so entsteht am Schwingkreis eine exponentiell abklingende Sinusschwingung («ringing circuit»³⁾), welche sich angenähert wie folgt darstellen lässt:

$$V(t) \approx I \sqrt{\frac{L}{C}} e^{-t/2\tau C} \sin \omega t.$$

Die Anfangsamplitude ist proportional zum Gleichstrom I , der durch den Schwingkreis geflossen ist. Bei konstantem Verhältnis $L:C$ variiert die Anfangsamplitude für Schwingkreise mit verschiedenen Resonanzfrequenzen nicht. Figur 1 zeigt das



Figur 1

Prinzipschema einer Koinzidenzmischstufe mit Schwingkreis. 1. $S_1 + S_2$ gleichzeitig geöffnet: $V(t) = (I_1 + I_2) A(t)$. 2. S_1 oder S_2 allein geöffnet: Stark gedämpfte Schwingung (wenn $R \ll r$). 3. S_2 nach S_1 geöffnet: $V(t) = I_2 A(t)$.

Prinzipschema einer Koinzidenzmischstufe mit Schwingkreis. Von den drei beschriebenen Möglichkeiten, die zwei Schalter zu öffnen, löst nur das gleichzeitige Öffnen der beiden Schalter eine Schwingung aus, deren Anfangsamplitude minde-

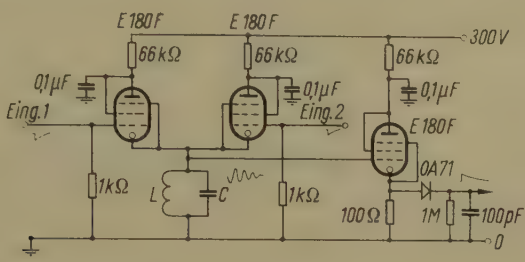
¹⁾ ETH. Physikalisches Institut.

²⁾ ETH. Cyclotron-Laboratorium.

³⁾ G. R. GAMERTSFELDER and J. V. HOLDAM, *Waveforms* (Mc Graw-Hill, 1949), S. 141.

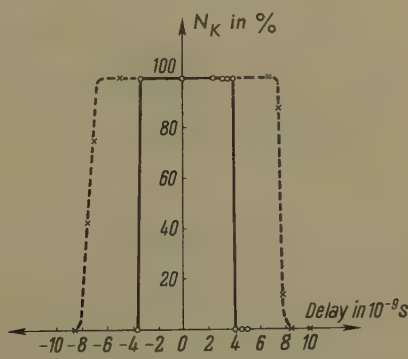
stens doppelt so gross ist wie die Anfangsamplituden der Schwingungen der Nichtkoinzidenzfälle. Die Koinzidenzauflösungszeit 2τ wird durch die Resonanzfrequenz des Schwingkreises bestimmt und beträgt rund $1/2$ Periodendauer.

Figur 2 zeigt das Schaltschema einer Koinzidenzschaltung mit Schwingkreis. Die beiden Pentoden E 180 F haben die Funktion der Schalter und der Dämpf-



Figur 2
Koinzidenzschaltung mit Schwingkreis.

fungswiderstände R der in Figur 1 gezeigten Schaltung. Der Dämpfungswiderstand hat bei stromdurchflossener Pentode angenähert einen Wert von der Grössenordnung $1/S$ (S Steilheit der Pentode). Wird die Streukapazität durch kurze Zuführungsleitungen zum Schwingkreis klein gehalten, so lassen sich in dieser Schaltung konventionelle Schwingkreise verwenden mit einer Resonanzfrequenz bis gegen 100 MHz. Damit die Eingangsröhren möglichst rasch geschlossen werden, empfiehlt sich die Verwendung von «White-Kathodenfolgern» als Treiberstufen zu dieser Koinzidenzschaltung. Vom Schwingkreis gelangt das Signal über einen Kathodenfolger zur Amplitudenmodulation. Im Koinzidenzfall erscheint am Ausgang der Schaltung ein Impuls, welcher die doppelte Amplitude besitzt gegenüber Impulsen von Nichtkoinzidenzfällen. Ein nachfolgender Amplitudendiskriminator hat die Aufgabe, nur Koinzidenzen weiterzuleiten.



Figur 3

Anzahl der Koinzidenzen, die bei gegenseitiger zeitlicher Verschiebung zweier Eingangsimpulse erhalten werden für zwei Schwingkreise mit den Resonanzfrequenzen von 20 und 50 MHz.
—○— Schwingkreis $f = 50$ MHz; —×— Schwingkreis $f = 20$ MHz.

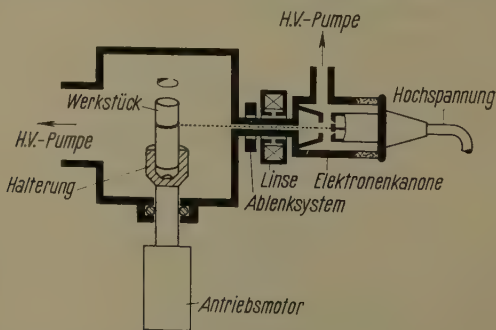
Die Messung der Kurven der Figur 3 erfolgte mit Hilfe eines Quecksilbereichimpulsgebers. Je kürzer die Periodendauer des Schwingkreises ist, desto steiler werden die Flanken der Koinzidenzauflösungskurve. Beim Schwingkreis mit der Resonanzfrequenz 50 MHz erstreckt sich diese Flanke über eine Zeit von $2 \cdot 10^{-10}$ s.

Zwei Vorteile dieser Schaltung bestehen darin, dass exponentiell abklingende Eingangsimpulse nicht zuerst mit Verzögerungskabel in kurze Impulse umgewandelt werden müssen und dass ein Koinzidenzereignis durch eine lang andauernde Schwingung gemeldet wird.

Schweissen mit Elektronenstrahlen. Von E. B. BAŞ und G. CREMOSNIK, Zürich⁴⁾.

In den Elektronenstrahlen kann sehr hoher Energiefluss in Form der kinetischen Energie der Elektronen erzeugt und auf einen kleinen Bereich einer Festkörperoberfläche konzentriert werden. Diese Wärmekonzentration führt zu einer örtlichen Schmelzung des Festkörpers, die schon seit langem, vor allem in den Röntgenröhren, als eine gefürchtete Erscheinung bekannt ist. In der letzten Zeit hat man diesen Effekt an vielen Orten für die Verschweissung von zwei Körpern nützlich auszuwerten versucht⁵⁻⁸⁾.

Die einfachste Anordnung für Schweissen mit Elektronen ist die der Röntgenröhre; das heisst, das zu schweisende Werkstück wird in einem Röntgenröhrensystem als Anode verwendet, wobei durch geeignete Bewegung des Werkstückes die Schweissnaht durch den Brennfleck des Elektronenstrahles geführt wird. Diese von WYMAN⁵⁾ und STOHR⁶⁾ angewendete Einkammeranordnung hat trotz ihrer Einfachheit verschiedene Nachteile. Wir sind deswegen zu einer Zweikammeranordnung übergegangen, welche in Figur 1 schematisch dargestellt ist. Die bedeutendste Aufgabe bei einem Elektronenschweisgerät ist die Erzeugung der Elektronenstrahlleistung und der Leistungsdichte im Schweissfleck. Diese Aufgabe ist besonders kritisch bei einem Zweikammersystem. Eine einfache Abschätzung der Schweissleistung für Materialwanddicken von einigen Millimetern führt auf eine bereitzu-



Figur 1

Schematische Darstellung des Zweikammer-Elektronenschweisgerätes.

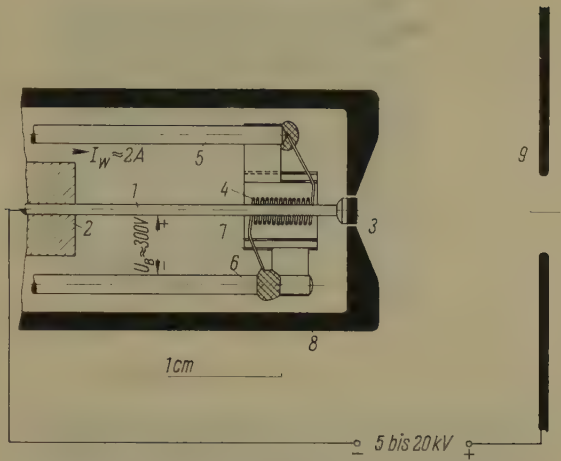
⁴⁾ ETH. Abteilung für industrielle Forschung (AFIF).

⁵⁾ W. L. WYMAN, *Welding Journal* 37, 41 (Februar 1958).

⁶⁾ J. A. STOHR, *Le Vide* 13, 163 (Mai-Juni 1958).

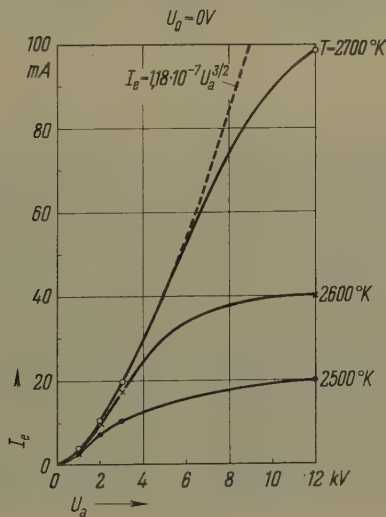
⁷⁾ J. A. STOHR, *Proc. 1st. International Congress on Vacuum-Technique 1958* (Pergamon Press).

⁸⁾ E. B. BAŞ, *Proc. 1st. International Congress on Vacuum-Technique 1958* (Pergamon Press).



Figur 2

Hochstromelektronenkanone mit Bolzenkathode: 1 Wolframbolzen; 2 Einspannklemme für Wolfram-bolzen; 3 Kathode (Tantal, Renium, Wolfram); 4 Wolfram-Heizwendel; 5, 6 Haltestiften; 7 Strahlungsschutzschirme; 8 Kathodenblende; 9 Anode.

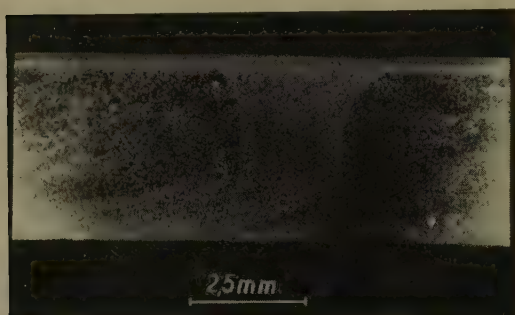


Figur 3

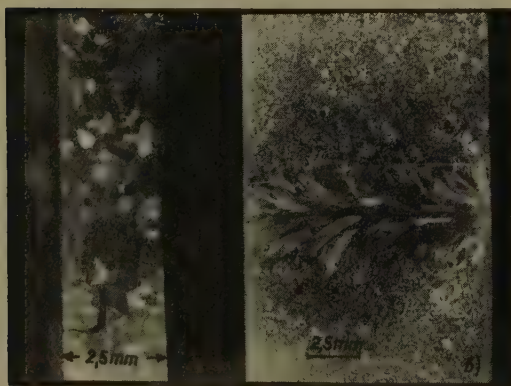
Raumladungscharakteristik der Hochstromelektronenkanone mit Bolzenkathode (Durchmesser der Emissionsfläche 1,55 mm).



Figur 4
Stumpfgeschweisste Cr-Ni-Stahlrohre (Aufsicht).



Figur 5
Querschnitt der Schweissnaht in Cr-Ni-Stahl.



Figur 6
Schweissnaht im Kupferrohr; Rohrdurchmesser 60 mm, Wanddicke 2,5 mm, Schweissleistung 1 kW
(vorgewärmt), Vorschub 2 mm/s.

stellende Strahlleistung von einigen Kilowatt; das heisst, bei einer Beschleunigungsspannung von 20 kV muss die Elektronenkanone Ströme von 100 mA und mehr liefern können. Diese Ströme müssen auf einen Bereich von etwa 1 mm Durchmesser fokussierbar sein. In unserem Gerät wurde eine Elektronenkanone mit grossflächiger Bolzenkathode⁹⁾ angewendet. Diese ist in Figur 2 schematisch dargestellt. Die Emissionsstromcharakteristik dieser Elektronenkanone ist in Figur 3 wiedergegeben. Wie ersichtlich, ist die Elektronenkanone in der Lage, bei einem Durchmesser der Emissionsfläche von nur 1,5 mm Ströme von 100 mA und mehr zu liefern.

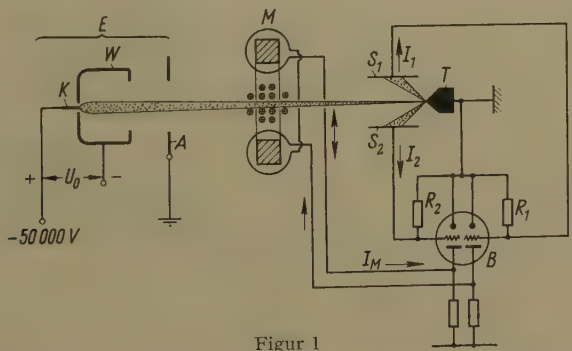
In Figur 4 ist eine Schweissnaht in Cr-Ni-Stahl 18/8 zu sehen. Ein Querschliff durch diese Schweissnaht ist in Figur 5 dargestellt. Cr-Ni-Stahl benötigt sehr geringe Schweissleistung (kleine Wärmeleitfähigkeit). Bei der Schweissung in Figur 4 betrug diese nur 150 W bei einer Vorschubgeschwindigkeit von etwa 4 mm/s. Kupfer benötigt nach Wolfram die grösste Schweissleistung. Figur 6 zeigt die Schweissnaht zwei aufeinander stumpfgeschweisster Kupferrohre von 60 mm Durchmesser und 2,5 mm Wanddicke. Figur 6a stellt den Querschliff durch die Schweissnaht dar. In Figur 6b ist die Schweissnaht geätzt und in Aufsicht abgebildet. Der Vorschub erfolgte von rechts nach links (im Aufsichtsbild) und betrug 2 mm/s bei einer Schweissleistung von ungefähr 1 kW. Das Schweissgut wurde bei defokussiertem Strahl vorgewärmt.

Ein ausführlicher Bericht erfolgt demnächst an einer andern Stelle.

Über eine Fernfokus-Elektronenkanone und ihre Anwendungen. Von E. B. BAŞ und F. GAYDOU, Zürich¹⁰⁾.

Zusammenfassung

Es wurde ein Strahlerzeugungssystem (Figur 1), bestehend aus einer Äquipotential-Bolzenkathode⁹⁾ mit planer kreisförmiger Emissionsfläche (*K*), einer Wehnelt-Blende besonderer Geometrie (*W*) und einer Anode (*A*) auf seine fernfokussierende Eigenschaft untersucht. Bei optimaler Wahl der Geometrieparameter kann man den Elektronenstrahl in 150 mm Entfernung von der Kathode in einem Brennfleck von



Figur 1

Automatische Zentrierung des Elektronenstrahlers auf die Spitze eines dachkant- oder kegelförmigen Targets. *K* Kathode; *W* Wehnelt-Blende; *A* Anode; *T* Dachkant- oder Kegeltarget; *S*₁, *S*₂ Meßsonden für Sekundärelektronen; *B* Röhrenbrücke für die Steuerung des magnetischen Zentrierfeldes; *M* magnetisches Ablenkelement.

⁹⁾ E. B. BAŞ, Z. angew. Phys. 7, 337 (1955).

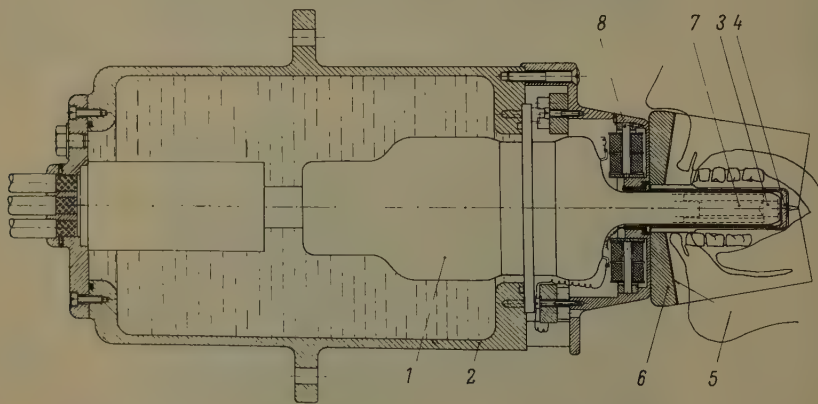
¹⁰⁾ ETH. Institut für technische Physik.

150 μ Halbwertsdurchmesser fokussieren. Dabei können Strahlströme von einigen Milliampere bei einer Beschleunigungsspannung von 50–60 kV erreicht werden. Der kritischste Parameter ist die Lage der Vorderbohrung der Wehnelt-Blende und deren Durchmesser. Das Wegrücken der Anode von der Kathode vermindert zwar auch den Strahldurchmesser im Fokus, es wird aber dabei auch die Feldstärke vor der Kathode reduziert, was sich auf die Raumladungsverhältnisse ungünstig auswirkt. Je nachdem der Strahldurchmesser im Fokus grösser oder kleiner als der Kathodendurchmesser ist, erscheint der Elektronenstrahl als ein divergierendes oder auf den Fokuspunkt konvergierendes Strahlenbündel.

In einer besonderen, in Figur 1 dargestellten Anordnung wurde der Elektronenstrahl auf die Spitze eines Kegeltargets fernfokussiert. Der Brennfleck von etwa 150 μ Durchmesser fällt gewöhnlich nicht zentrisch auf die Spitze des Targets. Um einen zentrierten Betrieb zu ermöglichen, wurde folgender Weg eingeschlagen: Die von dem Target ausgelösten Sekundärelektronen werden von zwei Meßsonden S_1 und S_2 aufgefangen und die Ströme I_1 und I_2 einer Röhrenbrücke zugeführt, welche ein magnetisches Ablenkelement speist. Trifft der Strahl die Spitze nicht zentrisch, so ist $I_1 \neq I_2$, und durch die Ablenkspule fliesst ein Strom, welcher den Strahl auf die Spitze ablenkt, bis der Strahl wieder die Spitze zentrisch trifft und bis auf eine kleine Regelrestgrösse $I_1 = I_2$ wird. Die Selbstzentrierung des Strahles eliminiert auch die Einflüsse der Störfelder. Für die Zentrierung auf ein Kegeltarget ist die angegebene Schaltung für zwei aufeinander senkrecht stehende Richtungen auszuführen.

Die beschriebene Fernfokus-Elektronenkanone mit Selbstzentrierung ermöglicht uns die Realisierung einer neuartigen Weitwinkelröntgenröhre für Panorama-Gebissaufnahmen in der Dentaldiagnostik¹¹⁾. Die prinzipielle Anordnung dieser neuen Methode der Radiographie ist in Figur 2 dargestellt.

Ein ausführlicher Bericht über die Untersuchungen erfolgt demnächst an einem andern Ort.



Figur 2

Eine Weitwinkel-Röntgenröhre für Dental-Panoramaaufnahmen. 1 Röntgenröhre; 2 Öltank; 3 kegelförmiges Target (Antikathode); 4 Aluminium-Abschirmrohr für den Schutz des Glasfortsatzes der Röhre; 5 Film; 6 Filmträger; 7 vakuumaufgedampfte Meßsonden für Sekundärelektronen auf der Innenseite des Glasfortsatzes; 8 magnetisches Zentrierquadrupol.

¹¹⁾ E. B. BAŞ und F. GAYDOU: Proc. 1st. International Congress on Vacuum Technique 1958 (Pergamon Press).

Über die relativistische Elektronenoptik elektrostatischer Beschleuniger. Von E. B. BAŞ, L. PREUSS und W. SCHNEIDER, Zürich¹²⁾.

Ein elektrostatischer Partikelbeschleuniger besteht aus einer Kette von Beschleunigungsstufen, zum Beispiel in der Form von Lochblenden- oder Rohr-Immersionslinsen. Die erste Aufgabe dieser Linsenkette ist die Beschleunigung der mit einer Energie U_0 eingeschossenen Partikel auf eine Endenergie U_B . Sie muss auch eine zweite Aufgabe erfüllen, die darin besteht, den engsten Querschnitt P des Einschussstrahles auf ein Target Q am Ausgang des Beschleunigers abzubilden. Die Berechnung der Elektronenoptik des Beschleunigers muss also eine Beziehung zwischen den Achskoordinaten z_p und z_q liefern, und dabei ist noch die Lateralvergrößerung β und die Angularvergrößerung γ anzugeben.

Für die achsennahen Elektronenbahnen in einem elektrischen Feld mit dem Achsenpotential $\Phi(z)$ gilt allgemein folgende Differentialgleichung:

$$\sqrt{(1 + \epsilon \Phi)} \frac{d}{dz} \left[\sqrt{(1 + \epsilon \Phi)} \Phi \frac{dr}{dz} \right] + \frac{1}{4} (1 + 2 \epsilon \Phi) \Phi'' r = 0$$

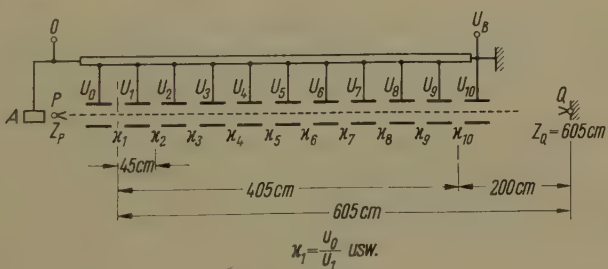
mit

$$\epsilon = \frac{e}{2 m_0 c^2} .$$

Die Multiplikatoren in runden Klammern berücksichtigen den relativistischen Effekt. Für ein Potential $\Phi = 5 \cdot 10^6$ V erhält man zum Beispiel

- für Elektronen $(1 + \epsilon \Phi) = 5,88$,
- für Protonen $(1 + \epsilon \Phi) = 1,0027$.

Wir ersehen daraus, dass für Ionenbeschleuniger der relativistische Effekt in den elektrostatischen Beschleunigern nicht berücksichtigt werden muss. Hingegen bei Elektronenbeschleunigern ist es angebracht, sich über den relativistischen Effekt Rechenschaft zu geben.

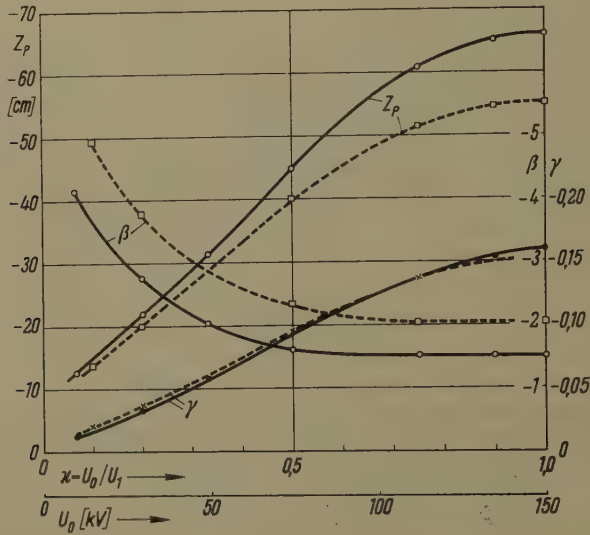


Figur 1
Schema eines elektrostatischen Beschleunigers.

Wir haben diese Rechnung für einen 10stufigen Elektronenbeschleuniger mit der Endenergie von $U_B = 1,5 \cdot 10^6$ V durchgeführt. Die Geometrie der Beschleunigungsstrecke ist in Figur 1 dargestellt. Die einzelnen Beschleunigungsstufen sind Zweirohr-Immersionen mit Spaltbreite $S = 4$ cm, Rohrradius $R = 5$ cm. Die Potentialverteilung in solchen Immersionen wurde in einem Widerstands-

¹²⁾ ETH. Institut für technische Physik.

Netzwerkmodell ausgemessen. Die Berechnung der Kardinalelemente der Linsen erfolgte mit der elektronischen Rechenmaschine ERMETH. Die Rechnungsergebnisse für die in Figur 1 angegebenen Daten sind in Figur 2 zusammengestellt. Es sind



Figur 2

10 Stufen; 1500 kV; $S/R = 0,8$; $R = 5$ cm; — relativistisch; ---- nichtrelativistisch.

dort in Abhängigkeit von der Einschussenergie U_0 die Lage der Elektronenquelle z_p (bezogen auf die Mittelebene der ersten Linse), die laterale Vergrößerung der Elektronenquelle auf dem Target β und der Winkelvergrößerung γ angegeben, wobei die Rechnung sowohl relativistisch wie nichtrelativistisch durchgeführt wurde.

Ein ausführlicher Bericht erfolgt demnächst in der ZAMP.

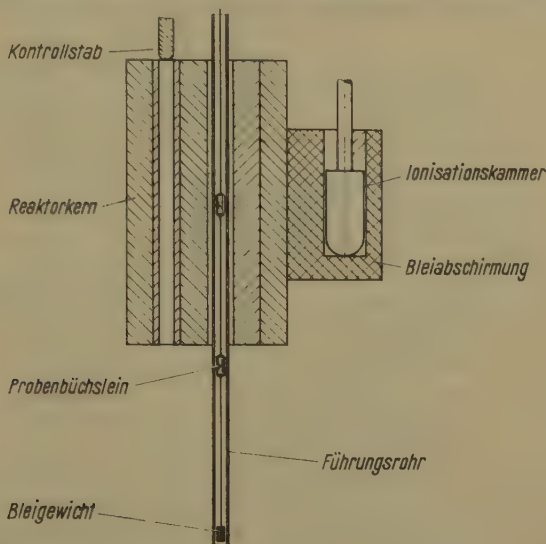
Reaktoroszillator zur Bestimmung makroskopischer Absorptionsquerschnitte von thermischen Neutronen. Von T. HÜRLIMANN, P. SCHMID und H. WINKLER, Würenlingen¹³⁾.

Am Swimming-Pool-Reaktor SAPHIR ist ein Reaktoroszillator eingerichtet worden. Er wird hauptsächlich für Reinheitsuntersuchungen von Materialien eingesetzt.

Figur 1 gibt eine schematische Darstellung der Einrichtung. Die gewählte Spaltstoffanordnung zeigt an der Messposition ein Maximum des Produktes aus thermischem Fluss und thermischer Einflussfunktion. Dort wird das die Probe enthaltende Schiffchen periodisch gegen ein zweites Schiffchen ausgetauscht, das lediglich als «Absorptionsgegengewicht» dient. Ein solches Gegengewicht ist bei wassermodierten Reaktoren vorteilhaft, da eine einzelne Probe infolge ihrer Wasserverdrängung grosse Absorptions- und Moderationssignale hervorruft. Durch ein Auswechseln der Probe an der Meßstelle gegen eine ähnliche Probe kann das Bruttosignal

¹³⁾ Reaktor AG.

relativ klein gehalten werden, so dass die Apparatur in einem empfindlicheren Bereich arbeiten kann. Bei geeigneter Wahl des gegenseitigen Abstandes der beiden Schiffchen wird ausserdem erreicht, dass das während des Austauschvorganges hervorgerufene kombinierte Transfersignal auf den 50. Teil des einzelnen Transfersignals sinkt und daher die Messung nicht mehr stört. Allerdings sind dann die



Figur 1

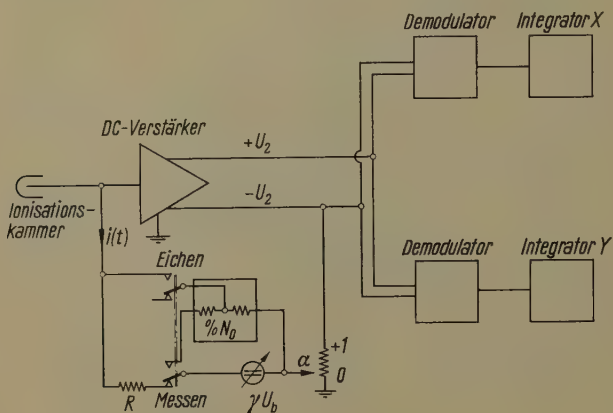
Anordnung des Reaktoroszillators. Das obere Probenbüchselein befindet sich eben in der Messposition.

Proben in der Position ausserhalb des Reaktors nicht mehr ganz ohne Einfluss auf die Reaktivität des Reaktors. Aus diesem Grunde wird das untere Schiffchen nicht gerade mit dem für den Bezug verwendeten Standard beladen.

Die Messproben bestehen gewöhnlich aus zwei Scheiben von 26 mm Durchmesser und 12 mm Höhe. Sie werden jeweils während 19 s in einer Position gehalten. Der Austauschvorgang dauert eine ganze Sekunde, wird aber dafür sehr präzise sinusförmig und ohne Phasenstreuung durchgeführt. Ein Messzyklus besteht aus 10 Halbperioden und ist deshalb in 200 s beendet. Die erzeugte Leistungsmodulation ΔN wird in Einheiten der mittleren Reaktorleistung N_0 gemessen, wie auch das Signal eines in einem weiteren Messzyklus oszillierten bekannten Standards. Der Bezug dieser Einheit auf den Absorptionsquerschnitt erfolgt mittels eines Eichsatzes. Er besteht aus 3 lithiumhaltigen Aluminiumscheibchen, welche zwischen die Probenhälften bzw. darüber und darunter eingebracht werden. Die relativen Lithiumgewichte (3,64 : 1 : 1) sind so gewählt, dass der Eichsatz wirkt, als ob das Messgut möglichst gleichmässig mit Lithium versetzt wäre. Diese Wirkung wird dann vollkommen erreicht, wenn sich die allgemeine axiale Abhängigkeit des Produktes von thermischem Fluss und Einfluss innerhalb der Probe durch ein Polynom vierten Grades ausdrücken lässt. Diese Eigenschaft des Eichsatzes erlaubt die Messung von Absorptionsquerschnitten in Proben, die merkliche Flussänderungen im Innern aufweisen. Insbesondere ist es möglich, bedeutend grössere Konzentrationen

von den zu untersuchenden Substanzen in Lösungen zu dulden. Bei normalen Messungen ist der Eichsatz durch einen Nullsatz aus Reinaluminium ersetzt. Die Differenz der Absorptionsquerschnitte von Eich- und Nullsatz ist auf denjenigen von Bor (Standard aus Harwell) bezogen.

Der Verlauf der Reaktorleistung wird mit einer Ionisationskammer verfolgt. Die Auswertung des Kammerstromes geschieht mit der in Figur 2 dargestellten Appa-



Figur 2

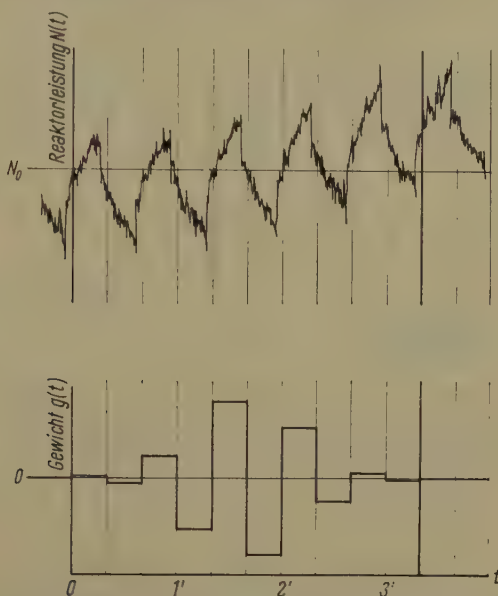
Messapparatur. Der Kammerstrom $i(t) = i_0 + \Delta i$ entspricht der Reaktorleistung $N(t) = N_0 + \Delta N$. Kompensationsspannung: $\gamma U_b = R i_0$. Verstärktes Modulationssignal: $U_2 = R \Delta i / \alpha$. Im Integrator X wird das Signal registriert. Der Integrator Y dient der Kontrolle (siehe Text).

ratur. Sie enthält Integratoren mit unbeschränkter Integrationskapazität, praktischer Trägheitslosigkeit und ausserordentlich guter zeitlicher Stabilität (Drift pro Stunde $< 2 \cdot 10^{-8}$ des maximalen Eingangssignals). Die Eichung des Signals in Einheiten von N_0 erfasst Ungenauigkeiten und Drifts der gesamten elektronischen Apparatur mit Ausnahme der Integratoren und der eigentlichen Eichwiderstände. Die rechteckige Demodulation des Reaktorsignals (Figur 3) erfolgt in einen Schaltungszweig phasenrichtig, so dass im Integrator X das Signal gemessen wird. In einem zweiten Schaltungszweig geschieht die gleiche Demodulierung um 90° phasenverschoben, so dass bei einwandfreiem Funktionieren im Integrator Y nur das Rauschen registriert wird.

Um den Einfluss von Reaktorleistungsdrift auf das Messergebnis möglichst zu eliminieren, wird die Demodulation der 10 Halbperioden eines Messzyklus mit verschiedenen Gewichten g durchgeführt. Falls der Binomialkoeffizient $\binom{9}{k-1}$ als Gewicht der k -ten Halbperiode gewählt wird, werden die ersten neun Glieder der Potenzreihe genau kompensiert, in welche sich der Reaktordrift entwickeln lässt. Auf diese Weise ist das Messergebnis in praktisch allen Fällen von langsamen Leistungsänderungen ungestört.

Die mittlere Schwankung von Absorptionsmessungen, die bei einer Reaktorleistung von 1 W durchgeführt werden, beträgt $0,1 \text{ mm}^2$. Dieser Wert entspricht genau dem erwarteten Beitrag des Reaktorrauschens. Die Ionisationskammer ist mit ihrer Meßstatistik dank der günstigen Plazierung im Swimming-Pool-Reaktor und der hohen Neutronenempfindlichkeit ohne Einfluss auf das gemessene Rau-

schen¹⁴). Die Messgenauigkeit entspricht somit dem theoretisch optimalen Wert. Sie kann natürlich noch weiter verbessert werden durch mehrfache Wiederholung der Messung oder durch Erhöhen der Reaktorleistung. Die Reproduzierbarkeit nach jeweiligem Probenwechsel ist von der gleichen Grösse wie die mittlere Schwankung.



Figur 3

Leistungs- und Demodulationssignal. Das Reaktorleistungssignal entspricht einem Absorptionsquerschnitt von 4 mm^2 .

Die Permeabilität von Pulverbetten. Von W. WIELAND¹⁵).

Eine ausführliche Publikation erscheint demnächst in der ZAMP.

Isotherme Strömungen in Raketendüsen. Von V. STINGELIN, Zürich¹⁶).

Die Aufgabe soll sein, mit einer gegebenen Wärmequelle (Reaktor), deren Höchsttemperatur beschränkt ist, einem Gase eine extrem hohe Austrittsgeschwindigkeit zu erteilen.

Bei den auf chemischer Basis arbeitenden Raketendüsen ist der maximalen Ofenenthalpie durch die Verbrennungsenergie des Treibstoffes zum voraus eine obere Grenze gesetzt. Haben wir einen Reaktor zur Verfügung, so können wir prinzipiell den gleichen Prozess durchführen, nur dass sich jetzt das Gas von aussen her, durch Wärmeübertragung an der Wand, erhitzt. Die maximal zulässige Reaktortemperatur begrenzt auch hier die Austrittsgeschwindigkeit.

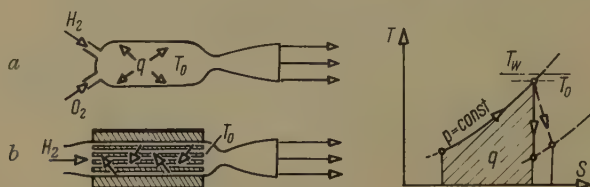
Aus diesen Erwägungen haben wir die alte Idee der isothermen Expansion (ZWICKY, WINTERBERG) wieder aufgegriffen und näher untersucht.

¹⁴) O. R. FRISCH und D. J. LITTLER, Phil. Mag. 45, 126 (1954).

¹⁵) Zementfabrik Holderbank-Wildeggen AG, technische Stelle.

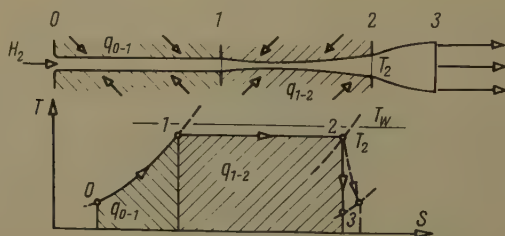
¹⁶) ETH, Institut für Aerodynamik.

Unter der vereinfachenden Annahme von konstanter Wandtemperatur erwärmen wir das Gas anfänglich isobar, bis die Differenz zwischen Wand- und mittlerer Gastemperatur klein ist. Unter weiterem Aufheizen expandieren wir anschließend das Gas derart, dass seine mittlere Temperatur konstant bleibt. Die Enthalpie des Mediums gibt uns zum Schluss durch adiabatische Expansion auf den Aussendruck nochmals einen Geschwindigkeitszuwachs. Im leeren Raum, mit dem Druck 0, können wir theoretisch auf diese Weise beliebig viel Energie zuführen und somit die gewünschten grossen Geschwindigkeiten erreichen. Selbst mit Reibung, welche ja bei realen Strömungen immer auftritt, wäre der Prozess realisierbar, allerdings mit entsprechenden grösseren Dimensionen der Düsen (siehe Figur).



Figur 1

Zustandsdiagramm für konventionelle Erwärmungs- und Expansionsprozesse: *a* Gasgemisch durch Verbrennung geheizt; *b* Gas durch Reaktor geheizt.



Figur 2

Prinzipiskizze (nicht maßstäblich) und T - S -Diagramm der isothermen Expansion.

Viel schlimmer wirkt der Temperaturrückgewinn in der Grenzschicht. Die für den Wärmeübergang massgebende Temperaturdifferenz ΔT bleibt nämlich mit zunehmender Mach-Zahl nicht konstant. Unter der Berücksichtigung der Kompressibilität können wir für die laufende Temperaturdifferenz schreiben:

$$\Theta_w = \Theta_0 - r \frac{\gamma - 1}{\gamma} \cdot \frac{\omega^2}{2}.$$

Θ_w die durch die mittlere Gastemperatur dividierte laufende Temperaturdifferenz zwischen Wand und Grenzschicht;

$\omega = w/\sqrt{R T_g}$, T_g mittlere Gastemperatur, R Gaskonstante, $\gamma = c_p/c_v$;

r Temperaturrückgewinnfaktor (0,85 für laminar, 0,9 für turbulent).

Der Index 0 bedeutet am Eintritt der Düse.

Daraus berechnet sich sofort die maximale isotherme Geschwindigkeit bzw. ω_{max} . Denn $\omega = \omega_{max}$, wenn $\Theta_w = 0$, also

$$\omega_{max} = \sqrt{2 \frac{\Theta_0}{r} \cdot \frac{\gamma}{\gamma - 1}}.$$

Im schlimmsten Fall, $r = 1$, wird die totale Geschwindigkeit, welche wir mit unserem Prozess erhalten,

$$w_{tot \max} = \sqrt{w_{\max \text{ isoth}}^2 + w_{ad}^2}$$

und mit

$$w_{ad} = \sqrt{2 R T_g \frac{\gamma}{\gamma - 1}}.$$

$$w_{tot \max} = \sqrt{2 R T_w \frac{\gamma}{\gamma - 1}}.$$

Dies ist aber die maximale Geschwindigkeit eines Gases, das von der Temperatur T_w (Wandtemperatur) auf den Druck 0 adiabatisch expandiert wird.

Wir erhalten also im Extremfall bei unendlich langer Düse nicht mehr, als wenn wir im unendlich langen Rohr isobar erwärmen und anschliessend adiabatisch auf den Druck 0 expandieren.

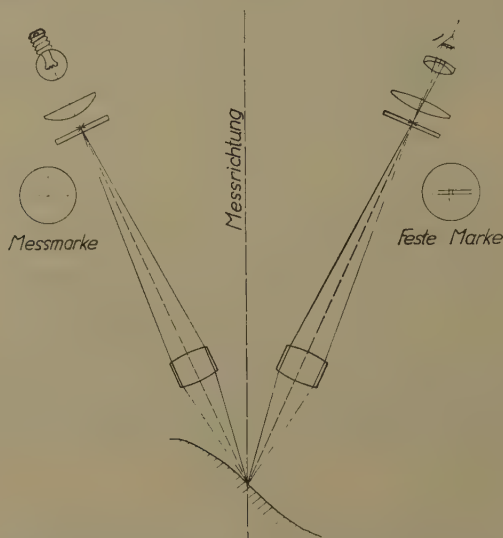
Ein optischer Tiefentaster. Von W. LOTMAR, Aarau¹⁷⁾.

Bei der dreidimensionalen Ausmessung von Körpern wie zum Beispiel Turbinenschaufeln oder Windkanalmodellen mit Hilfe von Koordinatenmessmaschinen besteht die Aufgabe, die Tiefenlage von Objektpunkten zu ermitteln, welche im allgemeinen auf schiefer zu den Koordinatenachsen stehenden Flächen liegen. Da die mechanische Antastung auf solchen Flächen wegen des endlichen Radius der Tastspitze prinzipiell mit Messfehlern behaftet ist, wird vielfach ein Mikroskop als optischer Tiefentaster verwendet. Man stellt dabei an einer durch eine Marke bezeichneten Stelle des Gesichtsfeldes das Objekt auf beste Schärfe ein. Um eine genügende Messgenauigkeit zu erreichen, ist die Anwendung einer relativ starken Vergrösserung (etwa 200mal) nötig, was wiederum eine kräftige Lichtquelle für die Auflichtbeleuchtung bedingt. Wegen der Unsicherheit bei der Einstellung auf «beste Schärfe» sowie der thermischen Einwirkungen einer starken Lichtquelle auf die Messmaschine befriedigt jedoch diese Anordnung nicht ganz.

Es ist bekannt, dass man mit einem Mikroskop viel genauer auf die Lage einer Messmarke quer zur optischen Achse einstellen kann als auf ihre Lage in Richtung der Achse. Die Suche nach einer Methode, bei welcher die Änderung der Tiefenkoordinate eine seitliche Bewegung einer Messmarke bewirkt, führte auf die in der Figur gezeigte Anordnung, welche im Prinzip dem Lichtschnittmikroskop von SCHMALZ ähnlich ist. Ein unter etwa 30° zur Messrichtung stehendes Mikroskop projiziert auf das Objekt eine Marke, deren Lage durch ein symmetrisch dazu angeordnetes zweites Mikroskop beobachtet wird. Bei Änderung der Tiefenkoordinate wandert die Marke durch das Gesichtsfeld und kann mit einer im Betrachtungs-

¹⁷⁾ Kern & Co. AG.

mikroskop befindlichen festen Marke zur Deckung gebracht werden. Mit der Verschiebung der Marke im Gesichtsfeld ist allerdings auch eine Änderung ihrer Schärfe verbunden, doch lässt sich die Anordnung natürlich so justieren, dass mit Einstellung der Koinzidenz auch die beste Schärfe erreicht wird. Durch Anbringung einer Skala im Ableseokular kann die Anordnung ferner als Mikrometer ausgebildet werden.



Messungen an einer Versuchsausführung¹⁸⁾ haben ergeben, dass bereits mit 50facher Vergrößerung eine Messgenauigkeit von $\pm 1\mu$ erreicht wird. Bei Verwendung von Objektiven mit einer numerischen Apertur von etwa 0,15 genügt dann bereits eine kleine Glühlampe von einigen Watt Leistung zur Beleuchtung vollauf.

Das Okularbild kann auch auf eine Mattscheibe projiziert werden, doch ist dann eine kräftigere Lichtquelle erforderlich.

Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques

The Hypercircle in Mathematical Physics. *A Method for the Approximate Solution of Boundary Value Problems.* Von J. L. SYNGE (Cambridge University Press, 1957). 424 S., 134 Fig.; 70 s.

In den letzten zehn Jahren sind von SYNGE und anderen (J. B. DIAZ, W. PRAGER, A. WEINSTEIN) eine ganze Reihe von Arbeiten erschienen, welche bei gewissen Randwertaufgaben der mathematischen Physik, vor allem bei Problemen aus der Mechanik, mit Hilfe der Hypercircle-Methode Fehlerabschätzungen gaben. Es ist sehr zu begrüßen, dass der ganze Ideenkreis im vorliegenden Buche nun eine geschlossene Darstellung gefunden hat.

¹⁸⁾ Ausgeführt von der Société Genevoise d'Instruments de Physique.

Viele der angedeuteten Randwertaufgaben lassen sich als Extremalprobleme formulieren, das heisst, bei der Interpretation in einem Funktionalraume entspricht die Lösung demjenigen Punkt in einer Ebene mit dem kleinsten Abstand von einem festen Punkt ausserhalb der Ebene, oder, was dasselbe ist, dem Schnittpunkt von zwei total senkrechten Ebenen. Bei einem vorliegenden Problem dieser Art gilt es nun zuerst, die Aufspaltung in die beiden senkrechten Teilräume überhaupt zu finden. Sodann kann man aber, mit Hilfe von elementargeometrischen Betrachtungen, die Lösung auf einem Hyperkreis (= Schnitt Hyperkugel-Hyperebene) von bekanntem Zentrum und Radius lokalisieren und damit zum Beispiel, falls das Zentrum als Näherungslösung verwendet wird, Abschätzungen für den Fehler im Sinne der mittleren Quadrate gewinnen. Diese Abschätzungen sind, auch wenn das Problem mit einem Differenzenverfahren behandelt wird, theoretisch exakt.

Es werden keine Vorkenntnisse aus der Funktionalanalysis vorausgesetzt, vielmehr wird auch der Nichtmathematiker anhand von instruktiven Beispielen und Übungsaufgaben gründlich in die Geometrie des Hilbert-Raumes eingeführt. Die praktische Durchführung der Methode wird im Falle der positiv definiten Metrik am Beispiel des Dirichlet- und Neumann-Problems (vor allem für verschiedene Torsionsaufgaben) ausführlich demonstriert. Im Falle der indefiniten Metrik werden Schwingungsprobleme behandelt.

P. LÄUCHLI

Matrizen (2. Auflage). Von Dr.-Ing. R. ZURMÜHL (Springer-Verlag, Berlin 1958). 467 S., 76 Abb.; DM 33.–.

In grossen Zügen ist der Inhalt der zweiten Auflage gleich geblieben, aber der methodische Aufbau der einzelnen Kapitel – insbesondere im theoretischen Teil – wurde gegenüber der ersten Auflage bedeutend verbessert. Insbesondere wirkt sich vorteilhaft aus, dass die Theorie der linearen Gleichungen (Kapitel II) jetzt auf dem Gaußschen Algorithmus aufgebaut wird; der Rangbegriff ergibt sich damit in zwangloser Weise. Kapitel VI (numerische Methoden) ist durch Aufnahme des Verfahrens von STIEFEL-HESTENES (konjugierte Gradienten) bereichert worden, dagegen verbleibt der Abschnitt über Eigenwertprobleme im wesentlichen leider auf dem alten Stand von 1950, der heute als überholt bezeichnet werden muss. Beispielsweise erlaubt keines der vom Verfasser propagierten Verfahren die saubere Bestimmung aller Eigenwerte einer symmetrischen Matrix grosser Reihenzahl, obwohl es mehrere solche Methoden gibt. Das Kapitel VII (technische Anwendungen) wurde unter Aufnahme von Beispielen aus der Mechanik erweitert.

H. RUTISHAUSER

Light Scattering by Small Particles. Von H. C. VAN DE HULST (John Wiley & Sons, Inc., 1957). 470 S., 103 Fig.; \$ 12.00.

Die Erfolge der Kolloidchemie, durch Heranziehung der Lichtstreuung Aufschlüsse über die Teilchenstruktur zu gewinnen, und in jüngster Zeit LA MERS *et al.* Entdeckung eines Tyndall-Linienspektrums an monodispersen Aerosolsystemen haben dem Problem der Wechselwirkung zwischen Licht und dispersen Stoffteilchen wieder vermehrte Aufmerksamkeit gebracht. Die Erfindung des Radars und insbesondere die neuen Möglichkeiten, die damit für die Meteorologie entstanden sind, belebten zusehends auch von der Seite der Mikrowellen her das Interesse an den Lichtstreuungsvorgängen. Die Bedeutung einer mathematischen Erfassung der Streuungserscheinungen ist insofern noch erheblich gesteigert worden, als auch die Kernphysik sich mit ähnlichen Vorgängen, wie zum Beispiel bei der Streuung von Neutronen, auseinanderzusetzen hat.

So ist ein Teilgebiet der theoretischen Physik, das den führenden Forschern des 19. Jahrhunderts grosse Fortschritte zu verdanken hatte und zu denen im gegenwärtigen Jahrhundert nur noch die Arbeiten von DEBYE ausschlaggebend beisteuerten, in jüngster Zeit wieder zu neuem Leben erwacht und hat, besonders entfacht durch die Erfordernisse der Kernphysik, in der Entwicklung mathematischer Verfahrenstechniken erhebliche Früchte getragen. Es muss daher VAN DE HULST sehr angerechnet werden, in einem umfassenden Werk die Grunderscheinungen der Lichtstreuung an kleinen Stoffteilchen zur Darstellung gebracht zu haben.

Das Buch besteht aus den drei Hauptabschnitten:

1. *Allgemeine Störungstheorie*. Diese wird entwickelt, ohne auf besondere Formen der streuenden Teilchen Bezug zu nehmen.

2. *Spezielle Typen der Streuteilchen*. Dieser Abschnitt beansprucht den grössten Teil des Werkumfanges.

3. *Anwendungen*. Sie erstrecken sich auf ausgewählte Gebiete der Chemie, Physik, Meteorologie und Astronomie. Im Falle der Sternkunde wird auch die Frage der Lichtstreuung an interstellarer Materie berührt.

Das Buch beschränkt sich auf die Behandlung der einfachen, kohärenten Streuung an Teilchen, die voneinander unabhängig sind; trotzdem verliert es aber dadurch nicht an Bedeutung. Eines der Kernprobleme der Schrift bildet die mathematische Erfassung der Streuung an einer homogenen Kugel. Erfreulich ist der klare Aufbau und die konsequente Darstellungsweise. Jedes einzelne Kapitelschliesst mit einem Literaturverzeichnis, dem die einschlägigen Arbeiten entnommen werden können. Auch die Aufmachung von seiten des Verlages verdient Anerkennung.

R. SÄNGER

Theorie der Relaissysteme der automatischen Regelung. Von J. A. S. ZYPKIN (R. Oldenbourg, München; Verlag Technik, Berlin 1958). Übersetzung aus dem Russischen: W. HAHN, Braunschweig, und R. HERSCHEL, Ulm. 472 S., 249 Abb., 17 Tab.; DM 52.-.

Relaissysteme nehmen in der Regelungstechnik einen bedeutenden Platz ein, doch sind die Eigenschaften der geschlossenen Systeme infolge der Nichtlinearität wesentlich schwieriger überblickbar als Regelsysteme mit linearen Gliedern. Dem Verfasser gelingt es, mit exakten Methoden die Wege anzugeben, auf welchen man unter Zuhilfenahme der Laplace-Transformation, bzw. mittels der Übertragungsfunktion (Frequenzgang) oder der Übergangsfunktion (im Buche mit Zeitcharakteristik bezeichnet) für den linearen Teil des Regelkreises, zu den allgemeinen Stabilitätskriterien gelangt. Der gesamte Regelkreis wird dabei aus einem linearen Teil und dem Relasteil gebildet. Der Relasteil kann eine Totzone, Hysterese, keines von beiden oder beide kombiniert, zwischen zwei festen Ausgangswerten in Funktion der Eingangsgrösse aufweisen. Zuerst wird immer der Fall ohne Totzone und ohne Hysterese untersucht. Die notwendigen Modifikationen für die übrigen Fälle sind dann relativ leicht ableitbar.

Eine besondere Charakteristik von Relaissystemen ist das Auftreten von stabilen Schwingungen mit begrenzter Amplitude (zum Beispiel Temperaturregelung mittelst Thermometerkontakt). Die Übertragungseigenschaften des linearen Systems beeinflussen diese Erscheinung, so dass von der Aufgabenstellung her geeignete Massnahmen getroffen werden müssen, um eine Verbesserung der Regeleigenschaften zu erreichen. Graphische (Phasendiagramme, Hodographen) und analytische Verfahren werden diskutiert und an Beispielen erläutert. Solche stabilen Schwingungen können vom System selbst herrühren oder von einer periodischen Eingangsgrösse erzwungen sein (Mitnahmeeffekt). Im allgemeinen Fall treten mehrere Eigen-

schwingungen auf, so dass ein periodisches Verhalten beobachtet werden kann. Die Untersuchung der Stabilität solcher periodischen Zustände braucht schon erhebliche Mittel, mit welchen besondere Stabilitätskriterien herausgearbeitet werden. Schliesslich werden Massnahmen zur Linearisierung von Relaissystemen und dabei auftretende optimale Vorgänge diskutiert. Ein mathematischer Anhang, Tabellen und ein ausführliches Literaturverzeichnis, nach Autoren geordnet, in dem die russischen Quellen stark überwiegen, beschliessen das Buch.

Der Vorzug des Werkes liegt in der einheitlichen Verarbeitung des weit verstreuten Materials. Wer mit der Theorie der linearen Regelvorgänge vertraut ist, wird mit Genuss dieser bei aller Konzentration sehr vollständigen Darstellung der Regelung mittelst Relaissystemen folgen. Etwaige ungewohnte Fachausdrücke, durch die Übersetzung bedingt, kann der Leser leicht selbst korrigieren. H. WEBER

Les calculateurs numériques automatiques et leurs applications.

Von A. SESTIER (Éditions «Hommes et Techniques», Neuilly 1958). 183 S., fFr. 3000.-.

Das Buch von SESTIER vermittelt einen allgemeinverständlichen Überblick über die digitalen Rechenautomaten. Sowohl deren charakteristische Merkmale wie auch ihre Anwendungsmöglichkeiten in Industrie, Handel und Wissenschaft werden besprochen und ein Ausblick auf die technische Entwicklung und die möglichen Fortschritte in der nächsten Zukunft gegeben (wobei solchen Extrapolationen natürlich immer ein grosses Mass an Unsicherheit eigen ist). Ebenso werden weitergehende Anwendungen, wie Übersetzungen, Dechiffirage, Dokumentation, kurz erwähnt. Die Darstellung hat vor allem die Verhältnisse und die Möglichkeiten Frankreichs im Auge und wendet sich wohl in erster Linie an leitende Persönlichkeiten industrieller und kommerzieller Unternehmungen, für die gelegentlich auch praktische Hinweise verschiedener Art gegeben werden. Einige bibliographische Angaben beschliessen das Buch. E. ROTH-DESMEULES

Theorie der Limitierungsverfahren. Von KARL ZELLER ([Ergebnisse der

Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Neue Folge, Heft 15] Springer-Verlag, Berlin 1958). 242 S.; DM 36.80.

Die Theorie der Limitierungsverfahren, speziell für divergente Zahlenfolgen, ist zu einem umfangreichen Gebiet der Analysis angewachsen, so dass eine knappe und übersichtliche Zusammenfassung der Ergebnisse sehr erwünscht ist, auch wenn heute noch keine einheitliche und abschliessende Darstellung möglich ist. Das Buch von ZELLER kommt diesem Wunsche in hervorragender Weise entgegen und ist vor allem geeignet, den Leser in die Hauptprobleme sowie in die vorhandene Literatur einzuführen. Zur Hauptsache werden die Matrixtransformationen und die zugehörigen Limitierungsverfahren betrachtet, während andere Methoden und Anwendungen nur beiläufig erwähnt werden.

Die ersten Kapitel des Buches bringen die Grundbegriffe, die Hilfsmittel aus der Funktionalanalysis, die Struktur der Wirkfelder und weiter, im Rahmen der allgemeinen Theorie, die direkten Sätze und die Umkehrsätze. Die folgenden Kapitel befassen sich mit speziellen Verfahren, wie die vom Cesàro-Abelschen Typ, die funktionentheoretischen Verfahren sowie andere Klassen von Verfahren. Die Beweise sind im allgemeinen nur angedeutet. Von besonderer Wichtigkeit ist das beigefügte Literaturverzeichnis von nicht weniger als 64 Seiten, das bis 1955 nachgeführt ist und kaum eine bedeutende Arbeit vermissen lassen dürfte. Das Buch wendet sich in erster Linie an den Mathematiker. E. ROTH-DESMEULES

An Introduction to Fourier Methods and the Laplace Transformation.

Von PHILIP FRANKLIN (Dover Publications, London and New York 1958). 289 S., 77 Fig.; \$ 1.75.

Diese Einführung ist eine korrigierte Neuauflage des bereits 1949 erschienenen Buches *Fourier Methods* und befasst sich mit den Fourier-Reihen und der Laplace-Transformation, und zwar vor allem im Hinblick auf ihre Anwendungen auf physikalische Probleme. Nach einem einleitenden Kapitel über komplexe Zahlen und elektrische Schwingungskreise werden die Fourier-Reihen und Fourier-Integrale behandelt. Alsdann folgt eine Einführung in die partiellen Differentialgleichungen (insbesondere Wärmeleitung, Schwingungsprobleme, Maxwell'sche Gleichungen usw.) und die zugehörigen Randwertprobleme. Schliesslich wird die Laplace-Transformation eingeführt mit Anwendungen auf gewöhnliche Differentialgleichungen sowie auf gewisse partielle Differentialgleichungen. An Vorkenntnissen wird im wesentlichen nur die Differential- und Integralrechnung vorausgesetzt. Die Darstellung ist sorgfältig und enthält über 800 Aufgaben mit den Lösungen sowie einige bibliographische Hinweise. Das Buch ist gut geeignet für Studierende, wobei auch der recht günstige Preis nicht ausser acht gelassen werden darf.

E. ROTH-DESMEULES

Elementary Statistical Physics. Von C. KITTEL (John Wiley & Sons,

New York 1958). 228 S., 28 Fig.; \$ 8.-.

Der Büchermarkt wurde in der letzten Zeit mit Neuerscheinungen über statistische Mechanik förmlich überschwemmt. Eine gewisse Aktualität ist dem Gebiet wegen den zahlreichen neueren Anwendungen vielleicht nicht abzusprechen. Davon ist in dem Buch von KITTEL erfreulicherweise manches zu finden; wir erwähnen stichwortartig: Negative absolute Temperatur, Streuung extrem hoch energetischer Teilchen, Strahlungsrekombination von Elektron-Loch-Paaren in Halbleitern. Leider hat sich der Leser dabei meist mit Andeutungen und Hinweisen auf die Originalliteratur zu begnügen, denn das Buch will «elementar» sein. Aber KITTEL hat die Gabe, schwierige Fragen auf einfache zu reduzieren (siehe zum Beispiel die Behandlung des Overhauser-Effektes als Übungsaufgabe). Das Buch wendet sich an die Physikstudenten und will eine Einführung vermitteln vor allem in die Methode der Ensembles, die stochastischen Prozesse und die Transporttheorie.

C. ENZ

Handbuch der Physik - Encyclopedia of Physics. Herausgegeben von

S. FLÜGGE, Band 26, 2. Teil: *Licht und Materie* (Springer-Verlag, Berlin 1958) 965 S., 754 Abb.; DM 168.-.

Der 26. Band enthält 4 Kapitel sehr verschiedenen Umfanges und Stils über *Lumineszenz* (G. F. J. GARLICK, 128 S.), *Temperaturstrahlung fester Körper* (G. A. N. RUTGERS, 42 S.), *Raman-Effekt* (S. MIZUSHIMA, 72 S.) und *Infrarotspektroskopie* (J. LECOMTE, 695 S.).

Der Artikel über Lumineszenz ist für Festkörperphysiker und (zum Teil auch für physikalische) Chemiker geschrieben und geht von den alten einfachsten Theorien der Kinetik (Reaktion 1. und 2. Ordnung für die Lumineszenzzentren, JABLONSKIS Termschema mit metastabilem Zwischenzustand und thermischem Aktivierungsprozess) zu den heute üblichen Vorstellungen der Energiebänder (Zustände der Lumineszenzzentren und der «electron traps» im «gap» zwischen Valenz- und Leitungsband) über. Das Kapitel über Beobachtungen an verschiedenen Phosphor-Klassen (Frank-Condon-Prinzip) wird vom Standpunkt dieser Theorien

und des Hippleschen Modells vorgenommen, die Struktur der Lumineszenzzentren wird dabei nicht eingehend behandelt. Bei der Besprechung einzelner Phosphore wird die Theorie verfeinert, speziell für Thermolumineszenz bei metastabilen Zentren, bei photohalbleitenden Phosphoren, mit und ohne strahlungslose Prozesse und bei der wichtigen Frage der Polarisierung der Lumineszenzstrahlung. Eine relativ ausführliche Behandlung findet ferner die Elektro- und die praktisch wichtige Radiolumineszenz.

Der Rutgersche Artikel über Temperaturstrahlung scheint unseres Erachtens hauptsächlich für Ingenieure geschrieben, indem er sich auf die Beschreibung der Temperaturstrahlung anhand phänomenologischer Gesetze beschränkt und eine Reihe von Messungsergebnissen für Metalle und technisch interessante Oxyde und dergleichen zitiert.

Der Artikel über den Raman-Effekt wiederum scheint hauptsächlich für den Chemiker gedacht, die klassische Theorie des Effektes, ihr Zusammenhang mit der Symmetrie der Molekel und deren Grundschrwingungen sowie ihre Stellung im Rahmen der Strahlungstheorie ist angedeutet, ebenso die (gruppentheoretische) Ableitung der Auswahlregeln des Schwingungs-Raman-Effektes. Als Beispiele sind einige experimentelle Resultate angegeben. Man kann sich fragen, warum die Herausgeber nicht einfach eine der bewährten Darstellungen des Raman-Effektes abgedruckt haben.

Obgleich nach Angabe des Autors hauptsächlich für Physiker gedacht, dürfte der als monumental anzusprechende Artikel über Infrarotspektroskopie am besten den Bedürfnissen des Chemikers dienen. Die Theorie der Infrarotspektren ist fast völlig beiseite gelassen. Dafür findet man zunächst eine (im wesentlichen qualitative) Besprechung der experimentellen Hilfsmittel (Spektrographen, Materialien usw.). Ferner ist in umfangreichen Kapiteln mit rund 500 (in vielen Fällen unnötig uneinheitlichen und gelegentlich unvollständig beschrifteten) Figuren eine bis 1956 reichende Sammlung experimenteller Ergebnisse über Infrarotspektren organischer und anorganischer Molekeln und Kristalle zusammengestellt. Einzelne Kapitel zeigen eine bisher nicht bekannte Vollständigkeit hinsichtlich der gegenwärtigen empirischen Kenntnisse und Literaturzitate, sind aber weitgehend qualitativ gehalten und auch nicht durchweg fehlerfrei. Speziell die Diskussion der Kristallspektren ist unseres Erachtens zu vereinfacht. Ein Kapitel über die bisherigen Ergebnisse der Intensitätsmessung der Infrarot-Interferometrie und die photometrische qualitative Analyse schliesst den Artikel ab.

HS. H. GÜNTHARD

Technische Hydro- und Aeromechanik. Von W. KAUFMANN (Springer-Verlag, Berlin 1958). 386 S., 266 Abb.; DM 37.50.

Diese zweite, verbesserte Neuauflage stellt für den jungen Ingenieur und Studenten auf dem Gebiet der Strömungsmechanik ein äusserst wertvolles und praktisches Lehrbuch dar. Die rasch vergriffene erste Auflage bestätigte die ausserordentlich günstige Wahl der behandelten Gebiete und bedingte nur wenige, eher formale Abänderungen des alten Textes. Zugleich sind aber darüber hinaus einige Ergänzungen neu hinzugenommen worden.

In seinen drei Hauptabschnitten, Eigenschaften der Flüssigkeiten und Gase, Hydro- bzw. Aerostatik und der Lehre von den Bewegungen der Flüssigkeiten (Dynamik), ist das Hauptgewicht auf das stoffbedingt grösste Gebiet der Dynamik gelegt. Das Werk zeichnet sich aus durch eine klare Beschreibung der physikalischen Grundlagen und folgert die Theorien in enger Anlehnung an die Praxis. Viele Gebiete wurden durch neueste Forschungsergebnisse bereichert, ohne dass da-

bei der Charakter eines Grundlagenwerkes verlorenging. Mancherorts sind zum tieferen Verständnis die Erläuterungen durch Rechenbeispiele ergänzt. Es würde hier zu weit führen, die behandelten Gebiete im einzelnen zu besprechen, es sei lediglich hervorgehoben, dass sämtliche dem heutigen Stand der Technik der Strömungslehre entsprechenden Grundgebiete behandelt werden. Angefangen bei den Bewegungsgleichungen von EULER, dem Energiesatz für inkompressible Flüssigkeiten von BERNOULLI bis zum Charakteristikenverfahren von PRANDTL und BUSEMANN wird überall, durch wertvolle Hinweise auf die einschlägige Literatur, der Weg zur vertiefteren Ausbildung erleichtert.

Die oben erwähnten Ergänzungen betreffen vor allem die Arbeiten über die Grenzschichttheorie, Tragflügeltheorie zur Berechnung des Auftriebes an gepfeilten und schiebenden Flügeln. Vermehrte Aufmerksamkeit wurde dem Verhalten der Unstetigkeitsfläche hinter Tragflügeln geschenkt. Die Gasdynamik hat auch eine der Aktualität entsprechende Erweiterung erfahren. Das im Gas- und Dampfturbinenbau wichtige Verhalten der Grenzschicht an rotierenden Scheiben hat in einem neuen Abschnitt seine Würdigung gefunden. Das Buch kann in dieser neuen Fassung wiederum bestens empfohlen werden.

V. STINGELIN

Numerische Mathematik. Zeitschrift herausgegeben von R. SAUER (München), E. STIEFEL (Zürich), J. TODD (Pasadena) und A. WALTHER (Darmstadt) bei Springer (Heidelberg). Bd. 1, Heft 1 (1959), 60 Seiten, Gr. 8°; brosch., DM 16.80.

Der Springer-Verlag bietet den an der numerischen Analysis interessierten wissenschaftlichen Kreisen eine neue Zeitschrift an («Numerische Mathematik»), deren 1. Heft nun in vorzüglicher Ausstattung vorliegt. Die Zeitschrift soll auf breiter internationaler Grundlage Arbeiten veröffentlichen, die sich mit allgemeinen Problemen des digitalen Rechnens und der Entwicklung von numerischen Verfahren beschäftigen.

Das wissenschaftliche Redaktions-Komitee besteht aus den Herren R. SAUER (München), E. STIEFEL (Zürich), J. TODD (Pasadena) und A. WALTHER (Darmstadt). Das erste Heft enthält Aufsätze von E. STIEFEL, A. S. HOUSEHOLDER und F. L. BAUER, M. WEISFELD, sowie einen interessanten Bericht von A. J. PERLIS und K. SAMELSON über die neue Formelsprache ALGOL, die dazu dienen soll, die Methoden der automatischen Programmierung für Rechenautomaten auf internationaler Grundlage einheitlich zu entwickeln.

H. RUTISHAUSER

Kerntechnik, Physik, Technologie, Reaktoren. Von W. RIEZLER und W. WALCHER (B. G. Teubner, Verlagsgesellschaft Stuttgart 1958). 1002 S., 493 Fig., 154 Tab.; DM 150.–

Gemessen am Werdegang der uns bereits vertrauten Wissenschaften, hat sich die Reaktortechnik äusserst sprunghaft entwickelt. Kaum zwei Jahrzehnte nach der erstmaligen Verwirklichung einer sich selbst unterhaltenden Kettenreaktion mit Kernbrennstoff sind Nutzenergie erzeugende Kernkraftwerke in Betrieb, und die Errichtung weit grösserer Einheiten steht in naher Zukunft bevor. Diese stürmische Entwicklung ruft gebieterisch nach Fachleuten aller Ausbildungsstufen. Hierbei ist besonders die dem Akademiker zugedachte Aufgabe eine mannigfaltige, verlangt doch der Reaktorbau Kenntnisse der mathematischen, physikalischen, chemischen, metallurgischen und technologischen Wissenschaften. Es ist gerade diese Vielseitigkeit, welche einerseits diesem modernen Betätigungsfeld einen so sonderlichen Anreiz gibt, welche aber auch dem Entstehen einer Lehr-

tradition, wie sie zum Beispiel für die Thermodynamik vorhanden ist, Hindernisse in den Weg legt. Die moderne Literatur über Reaktortechnik könnte man daher in zwei Gruppen scheiden. Die erste umfasst Werke, welche die Anwendungen der einzelnen Wissenschaften für die Probleme der Reaktortechnik zum Thema haben. Die andere Gruppe enthält Sammlungen der verschiedensten Gesichtspunkte, welche beim Reaktorbau berücksichtigt werden müssen. Je nach Vorbildung und Veranlagung der Autoren werden dabei die einen oder anderen Probleme gründlicher, klarer oder mit mehr pädagogischem Geschick behandelt. Solche Bücher sind naturgemäss oft sehr umfänglich, wie zum Beispiel das vorliegende erste deutschsprachige Werk *Kerntechnik* von RIEZLER und WALCHER.

Die Herausgeber haben sich der Mitarbeit einer grossen Zahl von Fachleuten versichert, so dass die einzelnen Kapitel mit der nötigen Wissenschaftlichkeit abgefasst werden konnten. Ein solches Vorgehen bringt zwar notwendigerweise eine zusätzliche Heterogenität mit sich, indem die verschiedenen Autoren an ihre Leser unterschiedliche Anforderungen stellen. So erfordert unter anderem der Abschnitt über Reaktorthorie eine mathematische Vorbildung, über welche der heute ausgebildete Ingenieur nicht ohne weiteres verfügt. Andererseits hätte die Behandlung der reaktorkinetischen Vorgänge durch Verwendung der beim Regelfachmann als bekannt anzunehmenden Methoden der Laplace-Transformation an Anschaulichkeit gewonnen. Obwohl die Herausgeber sich um eine einheitliche Bezeichnungsweise bemühen, wird beispielsweise der Ausdruck Reaktivität von den Teilautoren in unterschiedlicher Weise gebraucht (vgl. Definition S. 500 mit Bedeutung im Kapitel *Wärme Probleme*, zum Beispiel S. 598). 100 Seiten des Buches dienen der Beschreibung von Forschungs- und Leistungsreaktoren, wobei anhand ausgewählter Beispiele die besonderen Eigenschaften und Aufbauprinzipien der verschiedenen Systeme erläutert werden. Über Sicherheitsfragen, die möglichen Gründe für ein Abweichen eines Systems von vorgeschriebenen Betriebszuständen und die notwendigen organisatorischen Massnahmen sowie Richtlinien zur Standortwahl des Reaktors handelt ein weiterer Abschnitt. Diese Probleme werden anhand der Erfahrungen einiger Reaktorunfälle diskutiert. Die einleitenden Abschnitte des Buches vermitteln eine Einführung in die kernphysikalischen sowie die zum Verständnis des Reaktorbaues nötigen technologischen und verfahrenstechnischen Grundlagen. In die Zukunft weisen Bemerkungen über Kernfusion.

Der ganze Band enthält eine ungewöhnlich grosse Zahl von Figuren und Tabellen. Ein ausführliches Sachverzeichnis erleichtert den Gebrauch als Nachschlagewerk wesentlich.

Die Autoren haben sich bemüht, die durch die angelsächsische Originalliteratur eingeführten Bezeichnungen ins Deutsche zu übertragen. Dieser Versuch ist ihnen weitgehend gelungen. Einige Ausdrücke, wie Stromkammer für Ionisationskammer oder Wanderfläche für Migrationsfläche, werden jedoch kaum allgemeine Zustimmung finden.

W. HÄLG

Tabellen der Atomkerne. Teil I: *Eigenschaften der Atomkerne*. Band 1: *Die Elemente Neutron bis Zinn*. Von W. KUNZ und J. SCHINILMEISTER (Akademie-Verlag, Berlin 1958). 465 S., 305 Abb.; DM 105.-.

Bei dem vorliegenden Band handelt es sich um ein Tabellenwerk, das die charakteristischen Daten der stabilen und instabilen Isotope der Elemente Neutron bis Zinn erfasst. Den Tabellen geht eine in deutscher, englischer und russischer Sprache abgefasste Erläuterung voraus, in der die in einem Tabellenwerk unumgänglichen Abkürzungen sorgfältig interpretiert werden. Begriffe wie

zum Beispiel Konversionskoeffizienten, die in der Literatur zuweilen verschieden definiert erscheinen, werden eindeutig festgelegt. – Sämtliche über einen Kern bis zum 1. Januar 1958 bekannten Daten wurden kritisch durchgesehen und gemäss ihrer Zuverlässigkeit klassifiziert. An Stellen, wo dies zulässig erscheint, haben die Autoren aus vorliegenden Messresultaten einen sorgfältig gewogenen Mittelwert berechnet. Die Zahlenwerte werden, soweit dies möglich ist, mit Fehlergrenzen, Messmethode und Autor angegeben.

Die stabilen Isotope sind in diesem Werk durch folgende Grössen charakterisiert: Genaue Atommasse, relative Häufigkeit des Isotops, Spin, magnetisches Dipol- und Oktupolmoment sowie elektrisches Quadrupolmoment. Isomere Zustände mit Halbwertszeiten, die $0,1 \mu\text{s}$ überschreiten, erscheinen separiert. Für die radioaktiven Kerne ist das Zerfallsschema – sofern es mit einiger Sicherheit angegeben werden kann – graphisch dargestellt. Der Zerfall wird überdies durch folgende tabellierte Werte beschrieben: Halbwertszeit, Energie der Teilchen und Quanten, Spin und Parität der auftretenden Zustände sowie Konversionskoeffizienten und Multipolordnung der Gammaübergänge. Die prozentuale Intensität der angegebenen Strahlungskomponenten, die ft -Werte für Betazerfälle und die möglichen Methoden zur Herstellung des betreffenden Isotopes vervollständigen die Angaben.

Bei der äusseren Gestaltung des Buches wurde weniger Wert auf eine gedrängte Darstellung gelegt; dafür gewinnen die Tabellen an Übersichtlichkeit. Messgrössen, die zurzeit noch nicht zur Verfügung stehen, können leicht in die entsprechenden Kolonnen eingetragen werden. Eine merkliche Erleichterung für den Benützer der Tabellen bedeutet es, dass jedem Element ein separates Literaturverzeichnis zugeordnet ist. Auf diese Weise wird das so lästige Nachschlagen von Zitaten vermieden.

Der dauerhafte Einband und die vorzügliche Ausstattung des Buches lassen dieses Werk als wertvolles Hilfsmittel nicht nur des Kernphysikers und Radiochemikers, sondern auch all derjenigen erscheinen, die sich mit der Anwendung von Isotopen in Medizin, Biologie und Technik befassen.

F. HEINRICH

Introduction to Advanced Dynamics. Von S. W. MC CUSKEY (Addison Wesley Publ. Co., Inc., Reading, Mass., 1959). 263 S., 120 Fig.; \$ 8.50.

Eine hübsche und saubere Einführung in die höhere Dynamik. Sie behandelt 1. die Bewegung (und Relativbewegung) des Massenpunktes, 2. das Hamiltonsche Prinzip und die Lagrangeschen Gleichungen, 3. die Zentralbewegung, 4. die Dynamik des starren Körpers mit einer Einführung in die Probleme des Kreisel, 5. Schwingungen von konservativen und nicht konservativen Systemen mit zwei Freiheitsgraden, 6. die Hamiltonschen Gleichungen und den Phasenraum, 7. die Hamilton-Jacobischen Gleichungen. Das Buch wendet sich in erster Linie an Studenten der Physik, ist aber äusserst klar und einfach geschrieben und damit für jeden verständlich, der einen elementaren Mechanikkurs der bei uns üblichen Art hinter sich hat.

H. ZIEGLER

Statics and the Dynamics of a Particle. Von W. DUNCAN MAC MILLAN (Dover Publications, London and New York 1958). 450 S., 183 Fig.; \$ 2.00.

Das Buch gibt eine breite und elementare Darstellung der Punktmechanik, ergänzt durch einzelne Kapitel der Statik starrer Körper und der Festigkeitslehre.

H. ZIEGLER

NEUERSCHEINUNGEN

Petrochemische Berechnungsmethoden auf äquivalenter Grundlage (Methoden von P. NIGGLI)

Von Professor Dr. CONRAD BURRI

Professor an der Eidgenössischen Technischen Hochschule und an der Universität Zürich

334 Seiten mit 65 Figuren (1959). Preis gebunden Fr./DM 38.-. Mineralogisch-geotechnische Reihe, Band 7. Sammlung «Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften».

Inhalt: Einleitung – Methoden der graphischen Darstellung – Hilfsmittel – Die Niggli-Werte – Beziehungen zu Gewichts- und Kationenprozenten – Anwendung zur Veranschaulichung fundamentaler petrochemischer Beziehungen – Grenzen der Anwendung – Die Äquivalentnorm – Prinzipielles – Basis und Standard-Katanorm – Beziehung zu Gewichts- und Äquivalentprozenten sowie Niggli-Werten – Anwendung zum Studium der Heteromorphie und der metamorphen Gesteine – Berücksichtigung der Anionen nach BARTH und ESKOLA – Stoffbilanzen isovolumetrischer metasomatischer Prozesse – Tabellen der 1000fachen atomaren und molekularen Äquivalentzahlen.

ELEKTRIZITÄTSLEHRE

Von HEINZ SCHILT

Privatdozent an der Universität Bern

Mit einem Geleitwort von W. PAULI. 216 Seiten mit 187 Figuren (1959). In Ganzleinen Fr./DM 24.-. Physikalische Reihe, Band 3. Sammlung «Lehrbücher und Monographien aus dem Gebiete der exakten Wissenschaften».

Aus dem Inhalt: 1. Grundbegriffe und Elektrostatik. 2. Das stationäre elektrische Feld. 3. Das stationäre magnetische Feld und langsam veränderliche Felder. 4. Rasch veränderliche Felder. 5. Anhang.

Es besteht heute noch ein gewisser Gegensatz zwischen einer elementaren Elektrizitätslehre und der wissenschaftlich mustergültigen Maxwell'schen Theorie der Elektrizität. Das Buch von SCHILT führt den Leser mit einfachen mathematischen Methoden in die Maxwell'sche Auffassung der Elektrizität ein und stellt anhand vieler Beispiele den Zusammenhang mit der Praxis her. Es gibt der elementaren Lehre neue Impulse, die zum Überwinden des erwähnten Gegensatzes notwendig sind, und hilft damit dem Anfänger über unnötige Schwierigkeiten hinweg.

Zu beziehen durch Ihre Buchhandlung – Obtainable from your bookseller
Commandes à votre librairie

BIRKHÄUSER VERLAG · BASEL UND STUTTGART

FESTSCHRIFT JAKOB ACKERET

zum 60. Geburtstag am 17. März 1958

777 Seiten, broschiert Fr. 24.—

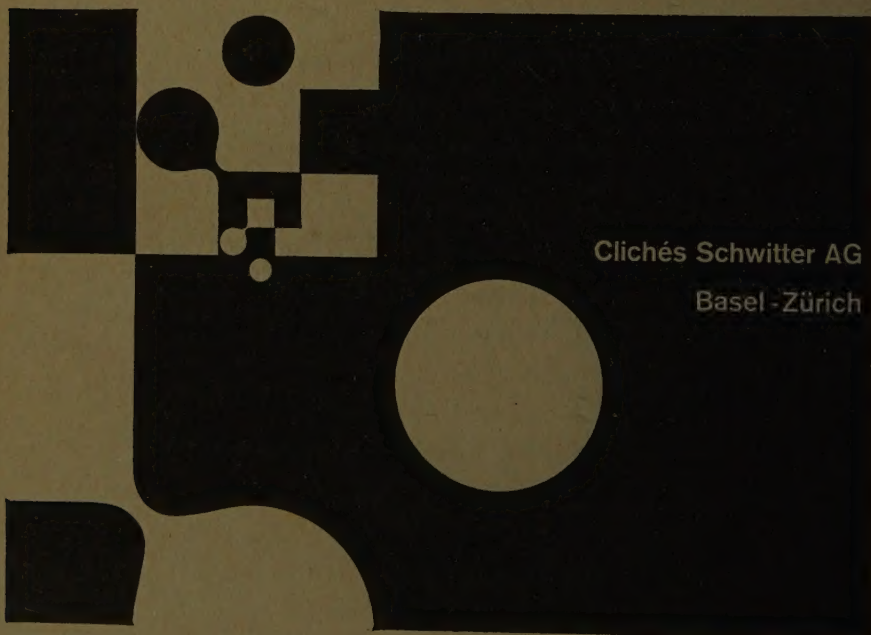
Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik (ZAMP) Vol. IX b, Fasc. 5/6, 1958

AUTOREN

| | | | |
|-------------------|-----------------|--------------------|----------------------|
| Ashley, H. | Ginsberg, Th. | Meyer, L. | Sears, W. R. |
| Baxter, D. C. | Görtler, H. | Meyer, R. E. | Shapiro, A. H. |
| Berg, B. van den | Grassmann, P. | Moser, H. H. | Spannhake, W. |
| Bergh, H. | Greber, I. | Oswatitsch, K. | Sprenger, H. |
| Berndt, S. B. | Grohne, D. | Oudart, A. | Strscheletzky, M. |
| Betz, A. | Gygi, H. | Pauli, W. | Stüssli, F. |
| Brieden, K. | Haack, W. | Plaskowski, Z. | Tank, F. |
| Broer, H. J. F. | Haan, R. E. de | Resler jr., E. L. | Teipel, I. |
| Bruhn, G. | Hakkinen, R. J. | Rosow, V. J. | Theodorides, Ph. |
| Brunelle, E. | Hartnett, J. P. | Roth-Desmeules, E. | Thommen, H. U. |
| Busemann, A. | Heinz, C. | Rott, N. | Traupel, W. |
| Chaix, B. | Hutton, St. P. | Roy, M. | Trilling, L. |
| Darrieus, G. | Jaquet, E. | Rudinger, G. | Walz, A. |
| Driest, E. R. van | Jaray, P. | Rutishauser, H. | Wattenwyl, R. |
| Dryden, H. L. | Jarre, G. | Sänger, E. | Wenk, F. |
| Eckert, E. R. G. | Kármán, Th. von | Sänger, R. | Weske, J. R. |
| Feindt, E. G. | Keller, C. | Sauer, R. | Winternitz, F. A. L. |
| Flügge-Lotz, I. | Kraft, H. | Schardin, H. | Witting, H. |
| Frössel, W. | Lukasiewicz, J. | Schlichting, H. | Zand, St. J. |
| Gerber, A. | Maeder, P. F. | Schmidt, E. | Ziegler, H. |
| | Manohar, R. | Schultz-Grunow, F. | Zierep, J. |

Zu beziehen durch die Buchhandlungen — Obtainable from your bookseller

Birkhäuser Verlag · Basel und Stuttgart



Clichés Schwitter AG

Basel-Zürich